Wintersemester 2011/2012 Trier, den 9.2.12

Klausur zur Einführung in die Mathematik

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

gilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei $a_1 = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_{n+1} := a_n^2 + \frac{1}{4}$.

i) Zeigen Sie, dass $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

iii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2n} \right)^n$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\nu+1} \right)^{\nu(\nu-1)} (z-2)^{\nu}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgende Doppelreihe konvergiert und berechnen Sie ihren Wert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{n+\nu} \frac{\nu^n}{n!\, 5^{\nu}}.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^x - 1 & , \text{ falls } x \geq 0, \\ 0 & , \text{ falls } x < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 7 (2+4 Punkte)
Es seien (X, d_X) ein vollständiger metrischer Raum, $f, g : (X, d_X) \to (\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ stetig und $\emptyset \neq A \subset X$.

i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{x \in X : f(x) < 0 < g(x)\}$$

offen in (X, d_X) ist.

ii) Für $x, y \in A$ sei $d_A(x, y) := d_X(x, y)$. Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen in (X, d_X) ist, wenn (A, d_A) vollständig ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Es sei $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und

$$H := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j p_j > 0\}.$$

Zeigen Sie, dass H konvex und offen in $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ ist.