

Jürgen Müller

Einführung in die Mathematik (plus)

Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2024/25

Universität Trier

Fachbereich IV

Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Abbildungen und Ringe	3
2 Reelle und komplexe Zahlen	17
3 Grenzwerte	26
4 Reihen und die Exponentialfunktion	40
5 Trigonometrische Funktionen und Wurzeln	49
A Weiteres zu Mengen und Abbildungen	59
B Von den natürlichen zu den reellen Zahlen	62
C Metrische Räume	70

1 Mengen, Abbildungen und Ringe

Mathematik ist einfach – bzw. zweifach. Im Grunde genommen befasst man sich mit lediglich zwei Arten von Objekten, nämlich Mengen und Abbildungen. Unsere Darstellung gründet auf dem von Georg Cantor geprägten (sogenannten naiven) Mengenbegriff:

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Ein solches Objekt x heißt **Element** der Menge M (Schreibweise: $x \in M$; ist x nicht Element von M , so schreiben wir $x \notin M$). Die Menge ohne Elemente heißt die **leere Menge** (Schreibweise: \emptyset oder $\{\}$).

Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Mengen, etwa die aufzählende Schreibweise oder auch die beschreibende, also eine Charakterisierung der Elemente. Die beschreibende Variante hat allgemein die Form¹

$$M := \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\} := \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\},$$

wobei E eine gegebene Eigenschaft ist. Wir stellen uns auf den Standpunkt, dass natürliche, ganze und rationale Zahlen bekannt sind, werden aber in der Plus-Vorlesung auf eine konstruktive Einführung eingehen.² Man schreibt

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl}\}, \\ \mathbb{N}_0 &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl oder } x = 0\}, \\ \mathbb{Z} &:= \{x : x \text{ ganze Zahl}\}, \\ \mathbb{Q} &:= \{x : x \text{ rationale Zahl}\}. \end{aligned}$$

Definition 1.1 Es seien A, B Mengen.

¹Das Symbol $:=$ nennt man ein definierendes Gleichheitszeichen. Es bedeutet, dass das auf der linken Seite Stehende durch das auf der rechten Stehende bezeichnet wird. Manchmal schreibt man auch $=$, wenn das links Stehende bekannt ist.

²Das Gleiche werden wir später für reelle Zahlen tun.

1. A heißt **Teilmenge** von B (Schreibweise: $A \subset B$ oder auch $A \subseteq B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt. Man nennt dann B auch eine **Obermenge** von A und schreibt dafür $B \supset A$.

2. A und B heißen **gleich** (Schreibweise $A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt. Sind dabei speziell $A := \{x\}$ und $B := \{y\}$ einelementig, so nennen wir x und y **gleich** (Schreibweise: $x = y$; sind x und y ungleich, so schreibt man $x \neq y$).

3. Die Menge

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

heißt **Vereinigung** von A und B und die Menge

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Schnitt von A und B . Weiter nennt man

$$B \setminus A := \{x : x \in B \text{ und } x \notin A\}$$

Differenz von B und A . Ist $A \subset B$, so heißt

$$A^c := C_B(A) := B \setminus A$$

Komplement von A (bezüglich B).

Beispiel 1.2 Sind $A := \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ und $B := \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$, so gilt

$$A \cap B = \{6k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ähnlich wie bei der obigen Einführung von Mengen wollen wir auf eine eher informelle Definition des zweiten grundlegenden Begriffes der Mathematik zurückgreifen:

Es seien X und Y nichtleere Mengen.

Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ *genau ein* Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Alternativ schreibt man auch f_x .

Dabei heißen X der **Definitionsbereich** und Y der **Zielbereich** von f . Außerdem nennt man

$$W(f) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in X\}$$

den **Wertebereich** von f . Man schreibt $f : X \rightarrow Y$ beziehungsweise $(f_x)_{x \in X}$ (oder auch $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$ oder kürzer $x \mapsto f(x)$). Im Fall der Schreibweise $(f_x)_{x \in X}$ spricht man auch von einer **Familie** in Y und nennt dann X die **Indexmenge**. Im Fall $X = \{1, \dots, n\}$ schreibt man meist (f_1, \dots, f_n) .³ Ist $X \subset \mathbb{Z}$, so nennt man $(f_n)_{n \in X}$ auch eine **Folge** in Y . Die f_n heißen dann **Folglied**er.

Ist $\emptyset \neq A \subset X$, so heißt die Funktion $f|_A : A \rightarrow Y$, definiert durch $f|_A(x) := f(x)$ für alle $x \in A$, die **Einschränkung** von f auf A . Die Menge

$$f(A) := W(f|_A) = \{f(x) : x \in A\}$$

nennt man **Bild** von A unter f . Ergänzend setzt man noch $f(\emptyset) := \emptyset$.

Beispiel 1.3 1. Ist $X \neq \emptyset$, so nennt man $\text{id}_X : X \rightarrow X$, definiert durch $\text{id}_X(x) := x$ für $x \in X$, die **identische Abbildung** auf X .

2. Es seien $X := Y := \mathbb{Z}$, und es sei $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch⁴

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

Dann ist $W(f) = f(\mathbb{N}_0)$ (und zwar die Menge der Quadratzahlen).

Definition 1.4 Es seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$.

1. f heißt **surjektiv** (oder Abbildung von X auf Y), falls $W(f) = Y$ gilt, d. h. zu jedem $y \in Y$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.⁵
2. f heißt **injektiv**, falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ folgt.
3. f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1.5 Für jeden Menge X ist die identische Abbildung id_X bijektiv. Ist f wie im Beispiel 1.3.2, so ist f weder surjektiv noch injektiv, dagegen ist $f|_{\mathbb{N}_0}$ injektiv.

³Man spricht dann auch von einem n -Tupel und im Fall $n = 2$ von einem geordneten Paar sowie im Fall $n = 3$ von einem Tripel.

⁴Die Schreibweise $(x \in X)$ ist im Weiteren als Kurzform von „für alle $x \in X$ “ zu lesen.

⁵An dieser Stelle eine kleine Anmerkung zur Frage, ob *Abbildung* und *Funktion* unterschiedliche Begriffe sind: Gemäß obiger (informeller) Definition ist dies nicht der Fall. Man verwendet den Begriff *Abbildung* allerdings oft dann, wenn auch der Zielbereich eine wesentliche Rolle spielt, wie etwa im Fall der Surjektivität. Man spricht selten von einer surjektiven Funktion und so gut wie gar nicht von einer Funktion von X auf Y .

Definition 1.6 Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ sowie $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Dann heißt die Funktion $g \circ f : X \rightarrow Z$, definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (x \in X),$$

Komposition (oder **Hintereinanderausführung** oder **Verkettung**) von f und g .

Definition 1.7 Man setzt

$$Y^X := \text{Abb}(X, Y) := \{f : f \text{ Abbildung von } X \text{ nach } Y\}$$

für Menge der Abbildungen von X nach Y . Sind $f, g \in Y^X$, so heißen f und g **gleich**, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.⁶

Beispiel 1.8 Ist f wie im Beispiel 1.3.2 und $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $g(y) := y + 1$ für $y \in \mathbb{Z}$, so ist $g \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

Man beachte: Hier ist auch $f \circ g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert und es gilt

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Dabei ist $g \circ f \neq f \circ g$ (da etwa $(g \circ f)(1) = 2 \neq 4 = (f \circ g)(1)$).

Satz 1.9 Es seien X, Y, Z, U Mengen und $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow U$ Abbildungen. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Es gilt $h \circ (g \circ f) : X \rightarrow U$ sowie $(h \circ g) \circ f : X \rightarrow U$ und für alle $x \in X$ ist

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

Damit sind die beiden Funktionen gleich. □

⁶Wir werden uns gelegentlich – so wie üblich und sehr praktisch – die Freiheit nehmen, zwei Funktionen $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow Z$ schon dann zu identifizieren, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt und der Zielbereich keine Rolle spielt.

Bemerkung und Definition 1.10 Sind X, Y nichtleere Mengen und ist $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in Y$ *genau* ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Dann ist durch

$$g(y) := x \quad (y \in Y),$$

wobei $y = f(x)$ eine Funktion $g : Y \rightarrow X$ definiert. Man nennt g die **Umkehrfunktion** von f . Es gilt dann $g \circ f = \text{id}_X$ sowie $f \circ g = \text{id}_Y$ und außerdem ist auch $g : Y \rightarrow X$ bijektiv.

Definition 1.11 1. Es seien X_1, \dots, X_n Mengen. Dann nennt man

$$X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

kartesisches Produkt der Mengen.

2. Es sei M eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f : M \times M \rightarrow M$ heißt **Verknüpfung** auf M . Man schreibt in diesem Kontext xy statt $f((x, y))$ für $(x, y) \in M \times M$. Gewohnt aus der Schule sind Verknüpfungen auf Zahlenmengen, etwa die Addition $+$ und die Multiplikation \cdot . Wir werden diese Symbole auch in allgemeineren Situationen verwenden. Im Fall des Multiplikationszeichens \cdot schreibt man meist kurz xy statt $x \cdot y$.

Wir betrachten nun Mengen und Verknüpfungen, die ein rudimentäres Rechnen zulassen.

Definition 1.12 Es seien M eine nichtleere Menge und \cdot eine Verknüpfung auf M .

1. Die Verknüpfung \cdot heißt **assoziativ**, falls $x(yz) = (xy)z$ für $x, y, z \in M$ gilt. In diesem Fall heißt (M, \cdot) eine **Halbgruppe**. Bei assoziativen Verknüpfungen lässt man die Klammern meist weg, setzt also zum Beispiel $xyz := (xy)z = x(yz)$.

2. Die Verknüpfung heißt **kommutativ**, falls $xy = yx$ für $x, y \in M$ gilt. In diesem Fall heißt man eine Halbgruppe **abelsch** oder auch **kommutativ**.

3. Ein $e \in M$ heißt **neutral** (bezüglich \cdot), falls

$$ex = xe = x \quad (x \in M)$$

gilt. Existiert in einer Halbgruppe (M, \cdot) ein neutrales Element e , so heißt das Tripel (M, \cdot, e) ein **Monoid**.⁷ Neutrale Elemente sind stets eindeutig, denn sind e und e' neutral, so ist $e' = ee' = e$.

⁷Man schreibt oft auch kurz M statt (M, \cdot) im Falle einer Halbgruppe und M statt (M, \cdot, e) im Falle eines Monoids.

Bemerkung und Definition 1.13 1. Das Paar $(\mathbb{N}, +)$ ist eine abelsche Halbgruppe, $(\mathbb{N}_0, +, 0)$, $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ sind abelsche Monoide.

2. Es sei $X \neq \emptyset$ ein Menge. Nach Satz 1.9 ist

$$\text{Abb}(X) := \text{Abb}(X, X)$$

mit der Komposition \circ von Funktionen als Verknüpfung ein Monoid mit neutralem Element id_X .

3. Ist X eine Menge, so heißt die Menge

$$\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$$

aller Teilmengen von X die **Potenzmenge** von X .⁸ Damit sind $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset)$ und $(\mathcal{P}(X), \cap, X)$ kommutative Monoide ($[\ddot{U}]$).

Bemerkung und Definition 1.14 Es sei (M, \cdot, e) ein Monoid. Ist $x \in M$, so heißt ein $y \in M$ **invers** zu x , falls

$$yx = xy = e$$

gilt.⁹ Existiert ein Inverses, so nennt man x **invertierbar**. Ist jedes $x \in M$ invertierbar, so heißt M eine **Gruppe**.

Inverse Elemente sind im Falle der Existenz eindeutig, denn sind y, y' invers zu x , so gilt

$$y = ye = y(xy') = (yx)y' = ey' = y'.$$

Man bezeichnet das inverse Element zu x mit x^{-1} . Bei Verwendung des Verknüpfungszeichens $+$ schreibt man meist $-x$ und dann auch kurz $x - y$ statt $x + (-y)$.

Ist $a \in M$ invertierbar, so ist die Funktion $f_a : M \rightarrow M$ bijektiv mit Umkehrfunktion $g_a : M \rightarrow M$ gegeben durch $g_a(y) = a^{-1}y$, also mit anderen Worten: Für jedes $y \in M$ hat die Gleichung $ax = y$ genau ein Lösung, nämlich $a^{-1}y$. Entsprechendes gilt für die Gleichung $xa = y$.

Beispiel 1.15 Die Tripel $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sind abelsche Gruppen. Im Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ sind nur ± 1 invertierbar.

⁸Stets ist $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$.

⁹Allgemeiner heißt y **linksinvers** zu x , falls $yx = e$ gilt, und **rechtsinvers** zu x , falls $xy = e$ gilt.

Bemerkung 1.16 Es sei (M, \cdot, e) ein Monoid. Sind $x, y \in M$ invertierbar, so ist wegen

$$xyy^{-1}x^{-1} = xx^{-1} = e = y^{-1}y = y^{-1}x^{-1}xy$$

auch xy invertierbar mit

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

und damit die Menge U der invertierbaren Elemente ein Monoid. Wegen $x^{-1}x = xx^{-1} = e$ ist auch x^{-1} invertierbar mit $(x^{-1})^{-1} = x$, also insbesondere damit (U, \cdot, e) eine Gruppe.¹⁰

Bemerkung und Definition 1.17 Nach Bemerkung 1.16 ist

$$S(X) := \{f \in \text{Abb}(X) : f \text{ invertierbar}\}$$

eine Gruppe, genannt **symmetrische Gruppe** von X . Ein Element $f \in S(X)$ heißt **Permutation** auf X . Für $n \in \mathbb{N}$ heißt speziell $S_n := S(\{1, \dots, n\})$ die n -te symmetrische Gruppe. Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch ([Ü]).

Jede bijektive Funktion $f : X \rightarrow X$ ist invertierbar und umgekehrt kann leicht sehen ([Ü]), dass jedes $f \in S(X)$ bijektiv ist, und dass dann f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist. Man schreibt daher üblicherweise auch f^{-1} für die Umkehrfunktion im Allgemeinen.

Wir wollen nun Produkte und Summen von mehr als zwei Faktoren beziehungsweise Summanden definieren.

Bemerkung und Definition 1.18 Es seien (M, \cdot, e) ein Monoid, $m, N \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq N$ und $x_m, \dots, x_N \in M$. Dann setzt man $\prod_{k=m}^{m-1} x_k := e$ und definiert **rekursiv**

$$x_m \cdot \dots \cdot x_n := \prod_{k=m}^n x_k := \left(\prod_{k=m}^{n-1} x_k \right) \cdot x_n$$

für $n = m, \dots, N$. Außerdem schreibt man im Falle $x_1 = \dots = x_n = x$ kurz

$$x^n := \prod_{k=1}^n x.$$

¹⁰mit \cdot eingeschränkt auf $U \times U$ und Zielbereich U

Insbesondere ist damit $x^0 = e$. Ist x invertierbar, so setzt man auch $x^{-n} := (x^{-1})^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Im Falle des Pluszeichens als Verknüpfung schreibt man statt \prod jeweils \sum . Außerdem schreibt man dann nx statt x^n .¹¹

Eng verbunden mit dem eben verwendeten Prinzip der rekursiven Definition ist ein wichtiges Beweisverfahren: die **vollständige Induktion**.

Für ein $m \in \mathbb{Z}$ und alle $\mathbb{Z} \ni n \geq m$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Zum Beweis der Behauptung

$$\text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \geq m \text{ gilt } A(n)$$

geht man oft folgendermaßen vor:

1. Man zeigt, dass $A(m)$ richtig ist (Induktionsanfang).
2. Man nimmt an, dass $A(n)$ oder auch $A(m), \dots, A(n)$ für ein beliebiges $n \geq m$ richtig ist (Induktionsannahme) und zeigt, dass aus der Induktionsannahme die Richtigkeit der Aussage $A(n+1)$ folgt (Induktionsschritt).

Aus 1. und 2. ergibt sich, dass $A(n)$ für alle $n \geq m$ richtig ist.¹²

Beispiel 1.19 Wir illustrieren die Beweistechnik anhand eines Beispiels. Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n}.$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind rechte und linke Seite 0.

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n}.$$

Induktionsschritt: Nach Induktionsannahme gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{n-1}{n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

und damit die Behauptung für $n+1$.

¹¹Man beachte, dass die Abbildung $(n, x) \mapsto nx$ im Allgemeinen keine Verknüpfung auf M ist.

¹²Denn es gilt ja dann $A(m) \Rightarrow A(m+1) \Rightarrow A(m+2) \dots$

Bemerkung und Definition 1.20 Es sei (M, \cdot, e) ein Monoid. Induktiv kann man zeigen, dass für $x, y \in M$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ folgende Potenzgesetze gelten:

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

Ist M abelsch, so gilt auch

$$x^n y^n = (xy)^n.$$

Allgemeiner kann man dann (induktiv und nicht leicht) zeigen, dass für $\varphi \in S_n$ und $x_1, \dots, x_n \in M$

$$\prod_{k=1}^n x_{\varphi(k)} = \prod_{k=1}^n x_k$$

gilt, d. h. die Reihenfolge der Faktoren kann beliebig vertauscht werden. Damit werden Schreibweisen wie $\prod_{j \in I} x_j$ und $\sum_{j \in I} x_j$, wobei I eine beliebige endliche Menge ist und $x_j \in M$ für $j \in I$ gilt, sinnvoll.

Im Fall invertierbarer x bzw. y gelten die Potenzgesetze auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.

Wir kommen jetzt zu algebraischen Strukturen mit zwei Verknüpfungen.

Bemerkung und Definition 1.21 Es sei R eine Menge und es seien $+$ und \cdot Verknüpfungen auf R . Dann heißt \cdot **distributiv** über $+$, falls für $x, y, z \in R$ gilt

$$x(y + z) = (xy) + (xz) \quad \text{und} \quad (x + y)z = (xz) + (yz).$$

Gilt

- (R1) $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe,
- (R2) $(R, \cdot, 1)$ ist ein Monoid,
- (R3) \cdot ist distributiv über $+$,

so heißen $(R, +, \cdot)$ **Ring**, das neutrale Element 0 zu $+$ **Nullelement** oder kurz **Null** und das neutrale Element 1 zu \cdot **Einselement** oder **Eins**.¹³ Ist $(R, \cdot, 1)$ abelsch, so heißt der Ring **kommutativ**.

Standardbeispiele kommutativer Ringe sind $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Man verwendet wie dort auch in allgemeinen Ringen Punkt-vor-Strich-Schreibweisen, also zum Beispiel $x + yz := x + (yz)$.

¹³Manchmal schreibt man deutlicher 0_R und 1_R für die neutralen Elemente eines Ringes. Andererseits schreibt man oft kurz R statt $(R, +, \cdot)$.

Bemerkung 1.22 Es seien R ein Ring und X eine nichtleere Menge. Wir definieren für $f, g \in R^X$ die Funktionen $f \pm g \in R^X$ und $f \cdot g \in R^X$ argumentweise durch

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in X).$$

Damit ist $R^X = (R^X, +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement 0_{R^X} und Einselement 1_{R^X} , definiert durch $0_{R^X}(x) := 0_R$ und $1_{R^X}(x) := 1_R$ für $x \in X$. Ist R kommutativ, so ist auch R^X kommutativ.

Bemerkung und Definition 1.23 Es sei R ein Ring. Induktiv ergeben sich für $x \in R$ und endliche Familien $(x_j)_{j \in I}$ in R die allgemeinen **Distributivgesetze**

$$x \sum_{j \in I}^n x_j = \sum_{j \in I} x x_j \quad \text{und} \quad \left(\sum_{j \in I} x_j \right) x = \sum_{j \in I} x_j x.$$

Weiter ist 0 **absorbierend**, d. h. für $x \in R$ gilt

$$0x = x0 = 0.$$

Denn: Wegen $0x = (0+0)x = 0x+0x$ ist $0 = 0x-0x = (0x+0x)-0x = 0x$.

Entsprechend sieht man, dass $x0 = 0$ gilt.

Damit gilt für $x, y, z \in R$ ([Ü])

$$x(y - z) = xy - xz, \quad (x - y)z = xz - yz \quad \text{und} \quad (-x)(-y) = xy.$$

In der Schule lernt man die binomischen Formeln für reelle Zahlen in folgender Form kennen:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{und} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Wir werden jetzt allgemeinere Formeln in Ringen herleiten, wobei er Exponent 2 durch ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ersetzt wird.

Satz 1.24 *Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$ und alle $n \in \mathbb{N}$*

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \quad (1.1)$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a a^k b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} b a^k b^{n-1-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{j=1}^n a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n - b^n.
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.25 Als Spezialfall $b = 1$ ergibt sich die wichtige **geometrische Summenformel**: Für $a \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = (a - 1)(1 + a + \dots + a^{n-1}), \quad (1.2)$$

die unter anderem eine zentrale Rolle im Zusammenhang mit der Binär-, Dezimal- bzw. Hexadezimaldarstellung natürlicher Zahlen spielt (siehe Anhang B).

Wir steuern nun auf eine Darstellung für Ausdrücke der Form $(a + b)^n$.

Bemerkung und Definition 1.26 Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{n}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{0}{k} := 0.$$

Damit sind die **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (gesprochen n über k) rekursiv bezüglich n definiert durch

$$\binom{n+1}{k} := \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}).$$

Aus der Definition folgt, dass alle Binomialkoeffizienten nichtnegative ganze Zahlen sind mit

$$\binom{n}{k} = 0 \quad (k > n).$$

Ordnet man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ in einem dreieckigen Schema an, wobei in der n -ten Zeile (mit Zeile 0 beginnend) die Koeffizienten $\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{n}$ stehen, so entsteht das **Pascalsche Dreieck**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

Binomialkoeffizienten lassen sich geschlossen darstellen, jedenfalls unter Verwendung von Fakultäten.

Definition 1.27 Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man n -**Fakultät** durch

$$n! := \prod_{k=1}^n k = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

So ist etwa $6! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 = 720$.

Satz 1.28 Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

Beweis. Wir zeigen die Darstellung per Induktion nach n .

Für $n = 0$ (und dann $k = 0$) sind nach den jeweiligen Definitionen beide Seiten 1. Gilt die Behauptung für $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt für $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\
 &= \frac{n!}{k!(n+1-k)!} (k + (n+1-k)) = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.
 \end{aligned}$$

Außerdem ist $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n}{n} + 0 = 1$. \square

Mit der Darstellung sieht man insbesondere die Symmetrie der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \quad (1.3)$$

Satz 1.29 (binomischer Satz)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. 1. Für $n = 0$ gilt $(a + b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$.

2. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Dann folgt mit Satz 1.28

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

\square

Beispiel 1.30 Für $n = 6$ gilt (siehe Pascualesches Dreieck)

$$(a + b)^6 = 1 \cdot b^6 + 6 \cdot ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + 1 \cdot a^6.$$

Bemerkung 1.31 Als Spezialfälle aus Satz 1.29 ergeben sich interessante Beziehungen für das Pascalsche Dreieck: Für $R = \mathbb{Z}$ und $a = 1, b = 1$ ergibt sich

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

das heißt die Summe der Binomialkoeffizienten in der n -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ergibt stets 2^n . Für $a = -1, b = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$0 = 0^n = ((-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k,$$

das heißt, versteht man die Binomialkoeffizienten in der n -ten Zeile jeweils abwechselnd mit dem Vorzeichen $+$ und $-$, so erhält man als Summe den Wert 0. Für $n = 6$ gilt etwa

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6 \quad \text{und} \quad 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0.$$

Bemerkung und Definition 1.32 Ist $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement 0 und Einselement $1 \neq 0$, so setzen wir

$$R^* := R \setminus \{0\}.$$

Dann heißt R ein **Körper**, falls R kommutativ ist und jedes $x \in R^*$ invertierbar ist.¹⁴ Nach Bemerkung 1.16 ist $(R^*, \cdot, 1)$ eine abelsche Gruppe und damit sind Körper **nullteilerfrei**, d. h. sind $x, y \in R$ mit $xy = 0$, so ist $x = 0$ oder $y = 0$. Man schreibt $y/x := yx^{-1}$ für $x \neq 0$ und wegen der Kommutativität auch $\frac{y}{x} := y/x$.

Beispiel 1.33 1. Der Ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper, der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nicht.
2. Es sei $\mathbb{F}_2 := \{\heartsuit, \clubsuit\}$, wobei die Addition und die Multiplikation durch die folgenden Verknüpfungstabellen (kommutativ) definiert sind:

+	♥	♣
♥	♥	♣
♣	♣	♥

·	♥	♣
♥	♥	♥
♣	♥	♣

Man kann leicht nachrechnen, daß $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist, genannt der **Binärkörper**. Dabei gilt $\heartsuit = 0 = 0_{\mathbb{F}_2}$ und $\clubsuit = 1 = 1_{\mathbb{F}_2}$, also ist in der Binärarithmetik $1 + 1 = 0$.

¹⁴Verzichtet man auf die Forderung der Kommutativität, so spricht man von einem Schiefkörper.

2 Reelle und komplexe Zahlen

Bemerkung und Definition 2.1 Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Man nennt eine Teilmenge R von $X \times X$ auch eine **Relation** auf X und schreibt xRy falls $(x, y) \in R$.¹⁵ Eine Relation $<$ auf X heißt (strenge) **Ordnung** auf X , falls gilt

(O1) Für alle $x, y \in X$ gilt entweder $x = y$ oder $x < y$ oder $y < x$ (Trichotomie).

(O2) Für $x, y, z \in X$ gilt: aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivität).

Das Paar $(X, <)$ heißt dann eine **geordnete Menge**. Außerdem bedeutet $x \leq y$, dass entweder $x < y$ oder $x = y$ gilt.¹⁶ Wenig überraschend schreibt man auch $y > x$ statt $x < y$ und $y \geq x$ statt $x \leq y$.

Bemerkung und Definition 2.2 Es sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Ist $<$ eine Ordnung auf R , so heißt $R = (R, +, \cdot, <)$ ein **geordneter Ring**, falls für $x, y \in R$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(O3) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in R$ (1. Monotoniegesetz).

(O4) Aus $x < y$ und $z > 0$ folgt $xz < yz$ (2. Monotoniegesetz).

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ ist ein geordneter Ring und $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ist ein geordneter Körper.

Ist R geordnet, nennt man $x \in R$ **positiv**, falls $x > 0$ gilt und **negativ**, falls $x < 0$ gilt. Aus (O3) folgt, dass x genau dann positiv ist, wenn $-x$ negativ ist.¹⁷

Denn: Aus $0 < x$ folgt $-x = 0 + (-x) < x + (-x) = 0$. Entsprechend folgt aus $-x < 0$ auch $0 = x + (-x) < x + 0 = x$.

Wir setzen noch $R_+ := \{x \in R : x > 0\}$ und $R_- := \{x \in R : x < 0\}$.

Satz 2.3 Es seien $R = (R, +, \cdot, <)$ ein geordneter Ring, $x, y \in R$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

¹⁵Sind M eine Menge und $f : M \rightarrow X$ eine Funktion, so ist der **Graph** $\{(x, f(x)) : x \in M\} \subset M \times X$ von f im Fall $M \subset X$ eine Relation auf X .

¹⁶Die Relation \leq ist dann eine sogenannte schwache Ordnung auf X .

¹⁷Insbesondere existiert damit im Binärkörper \mathbb{F}_2 keine Ordnungsrelation mit der Eigenschaft (O3).

1. Aus $x, y > 0$ oder $x, y < 0$ folgt $xy > 0$ und aus $x > 0, y < 0$ folgt $xy < 0$.
Speziell sind $x^2 > 0$ für $x \neq 0$ und $1 > 0$.
2. Ist $x < y$, so gilt $nx < ny$ und im Falle $x > 0$ auch $0 < x^n < y^n$.
3. Sind $x > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, so ist $mx > nx > 0$.¹⁸

Beweis. 1. Sind $x, y > 0$, so folgt mit (O4) sofort $0 = 0y < xy$. Sind andererseits $x, y < 0$, so sind $-y, -x > 0$ und damit $xy = (-x)(-y) > 0$. Sind $x, -y > 0$, so gilt $-(xy) = x(-y) > 0$. Ist $x \neq 0$, so ist $x > 0$ oder $x < 0$ nach (O1), also $x^2 > 0$. Wegen $1 \neq 0$ ist $1 = 1^2 > 0$.

2. und 3. als [Ü]. □

Satz 2.4 (Bernoulli-Ungleichung)

Sind R ein geordneter Ring und $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x \geq -1$.

Beweis. Denn: Für $n = 0$ sind beide Seiten 1. Gilt die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt wegen $x+1 \geq 0$ mit (O4) und Satz 2.3

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

□

Satz 2.5 Es seien K ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Gilt $0 < x < y$, so ist $0 < 1/y < 1/x$. Außerdem ist die Menge $\{z \in K : x < z < y\}$ unendlich.

Beweis. Zunächst folgt $1/x > 0$ aus Satz 2.3.1 (wäre $1/x < 0$, so wäre $1 = x/x < 0$). Genauso ist $1/y > 0$. Aus $x < y$ ergibt sich also $x/y < y/y = 1$ mit (O4) und wieder mit (O4)

$$1/y = (x/y) \cdot (1/x) < 1 \cdot (1/x) = 1/x.$$

Nach Satz 2.3 ist $m1 > n1 > 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, also $0 < 1/(m1) < 1/(n1)$ und folglich $x < x + (y-x)/(m1) < x + (y-x)/(n1) \leq y$. □

¹⁸Damit ist R_+ unendlich. Genauer enthält R_+ die natürlichen Zahlen in dem Sinne, dass man $n1$ mit n identifiziert.

Bemerkung und Definition 2.6 Ist K ein Körper und sind $a, b, c \in K$ mit $a \neq 0$, so hat die Gleichung $ax + b = 0$ genau eine Lösung, nämlich $x = -b/a$. Im Allgemeinen sind quadratische Gleichungen der Form¹⁹

$$0 = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

nicht mehr lösbar (hier setzen wir $1+1 \neq 0$ und damit $2^na \neq 0$ voraus). Ist K geordnet, so folgt aus Satz 2.3, dass notwendig die **Diskriminante**

$$\Delta := b^2 - 4ac$$

nicht-negativ ist. Aber auch in diesem Fall ist nicht stets Lösbarkeit garantiert. So haben etwa die Gleichungen $x^2 + x - 1 = 0$ und $x^2 - 2 = 0$ keine Lösung in \mathbb{Q} ([Ü]) obwohl die Diskriminate in beiden Fällen positiv ist.

Wir erweitern nun $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ zu einem geordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ so, dass quadratische Gleichungen mit nichtnegativer Diskriminante lösbar sind. Anschließend erweitern wir $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu einem Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ so, dass *alle* quadratischen Gleichungen lösbar sind.

Bemerkung und Definition 2.7 Es seien $(X, <)$ geordnet und $M \subset X$.

1. M heißt **nach oben beschränkt**, wenn ein $s \in X$ existiert mit $x \leq s$ für alle $x \in M$. Ein solches s heißt dann eine **obere Schranke** von M . Ist dabei $s \in M$, so heißt s **Maximum** von M . Man schreibt dann

$$\max M := s.$$

Eine obere Schranke $s^* \in X$ von M heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von M , falls $s \geq s^*$ für jede obere Schranke s von M gilt. Hieraus ergibt sich sofort, dass für jedes M höchstens ein Supremum und ein Infimum existieren. Wir schreiben im Falle der Existenz

$$\sup M := s^*$$

2. M heißt **nach unten beschränkt**, wenn ein $s \in X$ existiert mit $x \geq s$ für alle $x \in M$. Ein solches s heißt dann **untere Schranke** von M . Ist dabei $s \in M$, so heißt s **Minimum** von M . Man schreibt dann

$$\min M := s.$$

¹⁹die zweite Darstellung, die sich durch quadratische Ergänzung ergibt, nennt man Scheitelpunktform.

Eine untere Schranke $s_* \in X$ von M heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von M , falls $s \leq s_*$ für jede untere Schranke s von M gilt. Wieder gibt es höchstens ein Infimum, bezeichnet mit

$$\inf M := s_*.$$

3. M heißt **beschränkt**, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkung 2.8 Existiert $\max M$, so gilt $\sup M = \max M$ und im Falle der Existenz von $\min M$ ist $\inf M = \min M$. Außerdem existieren für endliche Mengen stets Maximum und Minimum. Weiter kann man zeigen ([Ü]), dass jede nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge von \mathbb{Z} ein Maximum (bzw. Minimum) hat. In \mathbb{Q} ist dies im Allgemeinen nicht der Fall: Für $M := \mathbb{Q}_+$ etwa gilt $\inf M = 0$.

Denn: Zunächst ist 0 eine untere Schranke von M . Ist $s > 0$, so existieren nach Satz 2.5 Punkte $x \in \mathbb{Q}_+$ mit $x < s$. Also ist s keine untere Schranke von M . Damit ist jede untere Schranke $s \leq 0$.

Wegen $0 \notin M$ hat M kein Minimum.

Bemerkung und Definition 2.9 Eine geordnete Menge $(X, <)$ heißt **ordnungsvollständig** oder kurz **vollständig**, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von X ein Supremum hat. Ein geordneter Körper $(K, +, \cdot, <)$ heißt **vollständig (geordnet)**, falls $(K, <)$ ordnungsvollständig ist.

Von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik ist das folgende Ergebnis:

Es existiert ein vollständig geordneter Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ so, dass \mathbb{Q} in \mathbb{R} eingebettet ist.

Man kann zeigen, dass in gewissem Sinne nur ein vollständig geordneter Körper existiert. Die Elemente von \mathbb{R} heißen **reelle Zahlen**. Wir werden in der Vorlesung plus (im Anhang B) genauer auf eine mögliche Konstruktion der reellen Zahlen und einen Beweis zur obigen Aussage eingehen.

Bemerkung und Definition 2.10 Manchmal ist es praktisch und sinnvoll, die geordnete Menge $(\mathbb{R}, <)$ um zwei Punkte $+\infty$ (oder kurz ∞) und $-\infty$ so zu erweitern,

dass definitionsgemäß $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für $M \subset \mathbb{R}$ ist damit $\sup M = \infty$, falls M nach oben unbeschränkt ist, und $\inf M = -\infty$, falls M nach unten unbeschränkt ist. Eine nichtleere Menge $I \subset \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, falls $x \in I$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\inf I < x < \sup I$ gilt. Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ setzt man

$$\begin{aligned}(a, b) &:=]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \text{ falls } -\infty \leq a < b \leq \infty, \\ [a, b) &:= [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \text{ falls } -\infty < a < b \leq \infty, \\ (a, b] &:=]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \text{ falls } -\infty \leq a < b < \infty, \\ [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \text{ falls } -\infty < a \leq b < \infty.\end{aligned}$$

Jedes Intervall hat eine solche Form, wobei stets $a = \inf I$ und $b = \sup I$ gilt.

Satz 2.11 (Quadratwurzeln) *Die Abbildung $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(x) := x^2$ ist bijektiv. Für $y \geq 0$ schreibt man $\sqrt{y} := f^{-1}(y)$. Die Lösungen der Gleichung $x^2 = y$ sind damit gegeben durch $\pm\sqrt{y}$.*

Beweis. Aus Satz 2.3 folgt, dass f injektiv ist. Zum Nachweis der Surjektivität sei $y \geq 0$ gegeben. Wir betrachten die Menge $M := \{x \in [0, \infty) : x^2 \leq y\}$. Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1 + y$, so gilt $x^2 > (1 + y)^2 > y$. Damit ist $1 + y$ obere Schranke von M . Da \mathbb{R} vollständig ist, existiert $s := \sup M$. Wir zeigen, dass weder $s^2 > y$ noch $s^2 < y$ gelten kann. Damit ist $s^2 = y$ nach (O1) und $\pm\sqrt{y}$ die Lösungen von $x^2 = y$.²⁰ Angenommen, es ist $s^2 > y$. Dann ist $\delta := (s^2 - y)/(2s) > 0$ und wegen $2\delta s = s^2 - y$

$$(s - \delta)^2 \geq s^2 - 2\delta s = y.$$

Ist $x \in M$, so folgt $x^2 \leq y \leq (s - \delta)^2$ und damit auch $x \leq s - \delta$. Also ist $s - \delta$ obere Schranke von M im Widerspruch dazu, dass s kleinste obere Schranke ist.

Angenommen, es ist $s^2 < y$. Dann ist $\delta := \min\{1, (y^2 - s)/(2s + 1)\} > 0$ und wegen $2s + \delta \leq 2s + 1$ gilt

$$(s + \delta)^2 - s^2 = \delta(2s + \delta) \leq \delta(2s + 1) \leq y - s^2,$$

also $(s + \delta)^2 \leq y$. Damit ist $s + \delta \in M$ und folglich s keine obere Schranke von M . Also ergibt sich auch hier ein Widerspruch. \square

²⁰Der Beweis zeigt auch, dass \mathbb{Q} kein vollständig geordneter Körper ist, da ansonsten etwa die Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung in \mathbb{Q} hätte.

Bemerkung 2.12 (*a-b-c-Formel*) Es seien a, b, c, Δ wie in Bemerkung und Definition 2.6, also $a \neq 0$ und $\Delta \geq 0$. Nach Satz 2.11 ist dann die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lösbar und die Lösungen x_1, x_2 sind gegeben durch

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Satz 2.13 (Dichtheit von \mathbb{Q})

\mathbb{N} ist unbeschränkt in \mathbb{R} ²¹ und für jedes nicht einpunktige Intervall I gilt $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Beweis. 1. Angenommen, \mathbb{N} sei nach oben beschränkt in \mathbb{R} . Dann existiert $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Da s kleinste obere Schranke von \mathbb{N} ist, ist $s - 1/2$ keine obere Schranke von \mathbb{N} . Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1/2$. Dann ist aber $s + 1/2 < n + 1 \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu s obere Schranke von \mathbb{N} .

2. Es seien $x, y \in I$ mit $x < y$. Zu zeigen ist, dass ein $r \in \mathbb{Q}$ existiert mit $x < r < y$. Ist $\delta := y - x$, so existiert nach 1. ein $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1/\delta$, also $1/q < \delta$. Ist ohne Einschränkung $y > 0$ und $p := \max\{k \in \mathbb{N} : k < qy\}$, so ist $p/q < y$ und $(p+1)/q \geq y$, also auch $r := p/q \geq y - 1/q > y - \delta = x$. \square

Unser Ziel ist es nun, den Körper der reellen Zahlen so zu erweitern, dass die quadratische Gleichung $x^2 = y$ auch für $y < 0$ lösbar ist.

Bemerkung und Definition 2.14 Wir betrachten die abelsche Gruppe

$$(\mathbb{R}^2, +, (0, 0)) = (\mathbb{R}^{\{1,2\}}, +, 0)$$

aus Bemerkung 1.22. Mit der dort allgemein definierten argumentweisen Multiplikation ist \mathbb{R}^2 zwar ein kommutativer Ring, aber nicht nullteilerfrei und damit insbesondere kein Körper. Wir definieren alternativ für $x = (s, t)$ und $y = (u, v)$ in \mathbb{R}^2

$$x \cdot y = (s, t) \cdot (u, v) := (su - tv, sv + tu).$$

Man rechnet nach ([Ü]), dass damit $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper ist mit $1_{\mathbb{R}^2} = (1, 0)$ und

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{s}{s^2 + t^2}, \frac{-t}{s^2 + t^2} \right) \quad (x \neq (0, 0)).$$

²¹Geordnete Körper mit dieser Eigenschaft nennt man archimedisch geordnet.

Legt man diese Multiplikation zugrunde, so schreibt man \mathbb{C} statt \mathbb{R}^2 und nennt die Elemente von \mathbb{C} **komplexe Zahlen**.²² Traditionell verwendet man meist z oder w als Bezeichnung für eine komplexe Zahl.

Aus der Definition der Addition und der Multiplikation ergibt sich

$$(s, 0) + (u, 0) = (s + u, 0) \quad \text{und} \quad (s, 0)(u, 0) = (su, 0),$$

das heißt, Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen $(s, 0)$ und $(u, 0)$ entsprechen der Addition und der Multiplikation von s und u in \mathbb{R} . Indem wir die komplexe Zahl $(s, 0)$ mit der reellen s identifizieren, können wir den Körper \mathbb{C} damit als Erweiterung des Körpers \mathbb{R} auffassen. Wir schreiben dann auch kurz s statt $(s, 0)$. Man nennt weiterhin

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

die **imaginäre Einheit** in \mathbb{C} . Für i gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Für reelle $y < 0$ sind damit $\pm i\sqrt{-y}$ die Lösungen von $z^2 = y$. Nach Satz 2.3 gibt es keine Ordnung auf \mathbb{C} so, dass \mathbb{C} zu einem geordneten Körper wird.

Bemerkung und Definition 2.15 Unter Verwendung der imaginären Einheit kann man jedes $z = (s, t) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$z = (s, t) = (s, 0) + (0, 1)(t, 0) = s + ti$$

schreiben. Diese Darstellung heißt **Normalform** (oder **kartesische Form**) von z . So ist etwa $z = (3, 1) = 3 + i$ und für $w = 1 - 2i$ gilt

$$z \cdot w = (3 + i)(1 - 2i) = 5 - 5i.$$

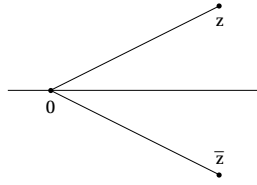
Weiter nennt man $\operatorname{Re} z := s$ **Realteil** von z und $\operatorname{Im} z := t$ **Imaginärteil** von z sowie

$$\bar{z} := s - ti$$

konjugiert komplex zu z .²³ So ist etwa $\overline{3 + i} = 3 - i$.

²²Damit ist \mathbb{C} nichts anderes als der \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^2 mit dem Bonus der Multiplikation \cdot , die bei erstem Faktor in \mathbb{R} nichts anderes als die Skalarmultiplikation in \mathbb{R}^2 ist.

²³Geometrisch entsteht \bar{z} durch Spiegelung von z an der reellen Achse.

Abbildung 1: z und \bar{z}

Für $z, w \in \mathbb{C}$ ergibt sich leicht

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{(\bar{z})} = z$$

sowie $2 \operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$ und $2i \operatorname{Im}(z) = z - \bar{z}$.

Bemerkung und Definition 2.16 Es sei $z = (s, t) = s + ti \in \mathbb{C}$. Die nichtnegative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{s^2 + t^2}$$

heißt **Betrag** von z .²⁴ Insbesondere ist damit $|z| > 0$ falls $z \neq 0$ und $|s| = \sqrt{s^2}$. Aus der Definition ergibt sich sofort $|z| = |\bar{z}| = |-z|$, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ sowie ([Ü])

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{und} \quad 1/z = \bar{z}/|z|^2, \quad \text{falls } z \neq 0.$$

Für $z = 3 + i$ etwa gilt $z\bar{z} = (3 + i)(3 - i) = 9 + 1 = |z|^2$ und $|z| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

Satz 2.17 Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $\langle z, w \rangle := \operatorname{Re}(z\bar{w})$.²⁵ Dann gilt

1. $|zw| = |z||w|$ und $|\langle z, w \rangle| \leq |z||w|$.
2. $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\langle z, w \rangle + |w|^2$.
3. (**Dreiecksungleichung**) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. 1. Nach Bemerkung und Definition 2.16 gilt

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$

²⁴Der Betrag $|z|$ beschreibt nach dem Satz von Pythagoras anschaulich die Länge der Strecke von 0 nach z in der euklidischen Ebene.

²⁵das kanonische Skalarprodukt in \mathbb{R}^2 .

Durch Wurzelziehen ergibt sich die erste Behauptung und die zweite folgt daraus mit $|\operatorname{Re}(z\bar{w})| \leq |z\bar{w}|$ und $|\bar{w}| = |w|$.

2. Wieder mit Bemerkung und Definition 2.16 gilt wegen $w\bar{z} = \overline{z\bar{w}}$

$$|z \pm w|^2 = (z \pm w)(\bar{z} \pm \bar{w}) = z\bar{z} \pm z\bar{w} \pm w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

3. Nach 1. und 2. ist $|z \pm w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$. Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung. \square

Bemerkung und Definition 2.18 Wir schreiben

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

für den **Einheitskreis** in \mathbb{C} . Ist $z \in \mathbb{C}^*$, so gilt $z = r\zeta$ mit $r = |z| > 0$ und $\zeta = z/|z| \in \mathbb{S}$. Sind $r' > 0$ und $\zeta' \in \mathbb{S}$ mit $z = r'\zeta'$, so ist $r' = r$ und $\zeta' = \zeta$. Also hat jedes $z \in \mathbb{C}^*$ genau eine multiplikative Zerlegung $z = r\zeta$ mit $r > 0$ und $\zeta \in \mathbb{S}$. Diese Darstellung von z nennt man die **Polarform** von z .

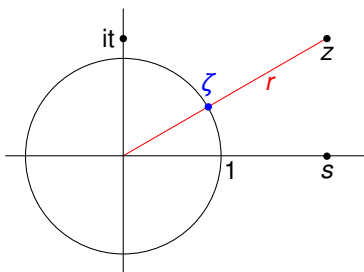


Abbildung 2: Polarform $z = r\zeta$.

3 Grenzwerte

Analysis kann man als die Mathematik von Grenzwerten ansehen. Dabei spielt die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine entscheidende Rolle. Im Weiteren sei stets

$$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},$$

also \mathbb{K} der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen.

Definition 3.1 Eine Menge $B \subset \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls ein $R > 0$ existiert mit $|z| \leq R$ für alle $z \in B$.

Sind X eine Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, so heißt f **beschränkt** falls $W(f) \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist. Weiter schreiben wir $Z(f)$ für die Menge der Nullstellen von f , also

$$Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

In Ergänzung zu Bemerkung und Definition 1.22 definieren wir für nullstellenfreies $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion $1/g : X \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(1/g)(x) := 1/g(x) \quad (x \in X)$$

und damit auch $f/g := f \cdot (1/g)$.

Definition 3.2 Ist $X \subset \mathbb{K}$, so heißt ein Punkt $a \in \mathbb{K}$ ein **Häufungspunkt** von X , falls für alle $\delta > 0$ ein $x \in X$ existiert mit $0 < |x - a| < \delta$.²⁶ Wir schreiben X' für die Menge aller Häufungspunkte von X . Ist $a \in X$ und kein Häufungspunkt von X , so heißt a ein **isolierter Punkt** von X .

Wir denken uns \mathbb{K} um einen Punkt ω erweitert und schreiben im Fall unbeschränkter $X \subset \mathbb{K}$ auch $\omega \in X'$, sprechen dabei aber nicht von einem Häufungspunkt.

Beispiel 3.3 Für $X = \mathbb{N}$ ist $\omega \in X'$ (archimedische Eigenschaft von \mathbb{R}). Zudem ist jedes $a \in \mathbb{N}$ ein isolierter Punkt von \mathbb{N} . Für $X = \{1/k, k \in \mathbb{N}\}$ ist $0 \in X'$.

Definition 3.4 Es seien $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $\rho > 0$. Für $a \neq \omega$ setzen wir

$$U_\rho(a) := U_{\rho, X}(a) := \{x \in X : |x - a| < \rho\} \quad \text{und} \quad \dot{U}_\rho(a) := \dot{U}_{\rho, X}(a) := U_\rho(a) \setminus \{a\}.$$

²⁶Man beachte, dass a nicht in X liegen muss.

Die Menge $U_\rho(a)$ heißt ρ -**Umgebung** von a (bezüglich X). Im Falle $X = \mathbb{R}$ ist $U_\rho(a)$ das Intervall $(a - \rho, a + \rho)$, und im Falle $X = \mathbb{C}$ ist $U_\rho(a)$ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius ρ . Außerdem setzen wir

$$\dot{U}_\rho(\omega) := \dot{U}_{\rho,X}(\omega) := \{x \in X : |x| > 1/\rho\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen ist $a \in X'$ genau dann, wenn $\dot{U}_{\rho,X}(a) \neq \emptyset$ für jedes $\rho > 0$ gilt.

Bemerkung und Definition 3.5 Ist $X \subset \mathbb{K}$ und ist $a \in X'$, so heißt $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ **abklingend** an a , falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Ist f abklingend an a und ist $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|g(x)| \leq R|f(x)|$ für eine Konstante $R \geq 0$, so ist auch g abklingend an a . Außerdem sind mit f und g auch $f \pm g$ abklingend an a .

Denn: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren $\delta, \eta > 0$ mit $|f(x)| < \varepsilon/2$ für $x \in \dot{U}_\delta(a)$ und $|g(x)| < \varepsilon/2$ für $x \in \dot{U}_\eta(a)$. Also gilt für $\rho = \min\{\delta, \eta\}$ und $x \in \dot{U}_\rho(a)$ nach der Dreiecksungleichung

$$|f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ so, dass $f - c$ abklingend an a ist, so heißt f **konvergent** an der Stelle a und c dann **Grenzwert** von f an der Stelle a . Man schreibt in diesem Fall kurz

$$f(x) \rightarrow c \quad (x \rightarrow a).$$

Aus $a \in X'$ folgt, dass höchstens ein Grenzwert c von f an a existiert, denn ist c' ein weiterer, so ist $c' - c = (f(x) - c) - (f(x) - c')$ abklingend an a und damit $c = c'$. Wir schreiben im Falle der Existenz des Grenzwertes auch

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) := c.$$

Ist speziell $X \subset \mathbb{R}$ und nach oben unbeschränkt, so schreibt man

$$f(x) \rightarrow c \quad (x \rightarrow +\infty) \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) := c,$$

(oder kurz $x \rightarrow \infty$) falls $f|_{X \cap [0, \infty)}(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow \omega$ gilt. Entsprechend schreibt man in Fall nach unten unbeschränkter $X \subset \mathbb{R}$

$$f(x) \rightarrow c \quad (x \rightarrow -\infty) \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) := c,$$

falls $f|_{X \cap (-\infty, 0]}(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow \omega$ gilt.

Bemerkung und Definition 3.6 Es sei $(x_n)_{n \in N}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir setzen im Weiteren stets voraus, dass $N \subset \mathbb{Z}$ nach unten beschränkt und unendlich ist. Im Falle $N = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$ schreiben wir auch $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ oder $(x_n)_{n \geq m}$ oder kurz (x_n) , wenn m klar oder irrelevant ist.

Da Folgen in \mathbb{C} spezielle \mathbb{C} -wertige Funktionen mit Definitionsbereich $N \subset \mathbb{K}$ sind, stehen die Begriffe von vorher zur Verfügung. Man betrachtet dabei stets Grenzwerte $n \rightarrow +\infty$. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abklingend an $+\infty$, so spricht man auch von einer **Nullfolge**. Außerdem sagt man kurz (x_n) sei konvergent gegen c , wenn $(x_n) \rightarrow c$ für $n \rightarrow +\infty$ gilt. Wir schreiben dann auch

$$\lim x_n := \lim_{n \in N} x_n = c.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt **divergent**. Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) auch beschränkt.

Beispiel 3.7 Ist $f(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C}^*$, so ist f abklingend an ω . Insbesondere ist $(1/n)$ eine Nullfolge

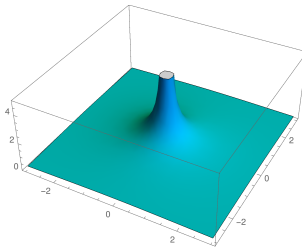


Abbildung 3: $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/|z|$.

Bemerkung und Definition 3.8 Für $q \in \mathbb{K}$ nennt man eine Folge der Form (q^n) **geometrische Folge**. Für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge.

Denn: Ist $r := 1/|q| - 1$, so ist $|q| = 1/(1+r)$, also nach der Bernoulli-Ungleichung $|q|^n \leq 1/(1+rn) < r^{-1}/n$. Da $(1/n)$ eine Nullfolge ist, ist auch (q^n) abklingend.

Bemerkung 3.9 Es seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ und f abklingend an a . Existiert ein $\rho > 0$ so, dass $g|_{U_\rho(a)}$ beschränkt ist, so ist auch fg abklingend an a .

Denn: Es seien $R, \rho > 0$ so, dass $|g(x)| \leq R$ für alle $x \in \dot{U}_\rho(a)$, so ist $|f(x)g(x)| \leq R|f(x)|$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Daher ist auch fg abklingend an a .

Der folgende Satz zeigt, dass die Grenzwertbildung mit den algebraischen Operationen in \mathbb{C} verträglich ist.

Satz 3.10 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$. Weiter sei $a \in X'$ mit*

$$f(x) \rightarrow b \quad \text{und} \quad g(x) \rightarrow c \quad (x \rightarrow a).$$

Dann gilt

1. $(f \pm g)(x) \rightarrow b \pm c \quad (x \rightarrow a)$.
2. $(f \cdot g)(x) \rightarrow b \cdot c \quad (x \rightarrow a)$.
3. *Ist g nullstellenfrei und ist $c \neq 0$, so folgt $(f/g)(x) \rightarrow b/c \quad (x \rightarrow a)$.*

Beweis. 1. Mit $f - b$ und $g - c$ ist auch $f + g - (b + c)$ abklingend an a .

2. Zunächst existiert ein $\rho > 0$ mit $|g(x) - c| < 1$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$ und somit auch

$$|g(x)| = |g(x) - c + c| \leq 1 + |c|.$$

Damit ist g beschränkt auf $\dot{U}_\rho(a)$. Weiter ist

$$f(x)g(x) - bc = f(x)g(x) - bg(x) + bg(x) - bc = (f(x) - b)g(x) + b(g(x) - c).$$

Nach Bemerkung 3.9 ist die rechte Seite abklingend an a , also auch die linke.

3. Nach 2. reicht es, zu zeigen:

$$(1/g)(x) \rightarrow 1/c \quad (x \rightarrow a).$$

Da $c \neq 0$ ist, existiert ein $\rho > 0$ mit $|g(x) - c| < |c|/2$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Also gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung ([Ü])

$$|g(x)| = |c + g(x) - c| \geq |c| - |g(x) - c| > |c| - |c|/2 = |c|/2 > 0$$

und damit $|1/g(x)| \leq 2/|c|$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Folglich ist $1/g$ beschränkt auf $\dot{U}_\rho(a)$. Nach Bemerkung 3.9 ist

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c} = \frac{1}{cg(x)}(c - g(x))$$

abklingend an a , also gilt $1/g(x) \rightarrow 1/c$ für $x \rightarrow a$. □

Bemerkung 3.11 Sind $X \neq \emptyset$ eine Menge und $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, so schreiben wir kurz $f \leq g$, falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Sind unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes f, g reellwertig und $f \leq g$, so gilt $b \leq c$ ([Ü]).

Bemerkung und Definition 3.12 Eine **Polynomfunktion** oder kurz **Polynom** ist eine Funktion $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = c_d z^d + c_{d-1} z^{d-1} + \cdots + c_0 = \sum_{k=0}^d c_k z^k$$

mit den **Koeffizienten** $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{C}$. Im Falle $c_d \neq 0$ nennt man $\deg(p) := d$ den **Grad** von p und $c_d z^d$ den **Führungsterm**. Polynome verhalten sich für große $|z|$ wie der Führungsterm, d. h.

$$\frac{p(z)}{c_d z^d} = 1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{c_k}{c_d z^{d-k}} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow \omega). \quad (3.1)$$

Schießlich haben Polynome vom Grad $d \in \mathbb{N}$ höchstens d Nullstellen ([Ü]).

Sind $p, q \neq 0$ Polynome, so ist auch $p \cdot q$ ein Polynom, und zwar vom Grad $\deg(p) + \deg(q)$. Außerdem ist $\mathbb{C} \setminus Z(q)$ endlich. Funktionen der Form p/q heißen **rational**. Sind p vom Grad d und q vom Grad m mit Führungsterm $c_d z^d$ bzw. $b_m z^m$, so verhält sich p/q nach (3.1) für große $|z|$ wie der Quotient der Führungsterme, d. h.

$$\frac{(p/q)(z)}{(c_d/b_m)z^{d-m}} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow \omega). \quad (3.2)$$

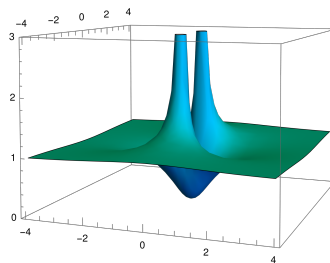


Abbildung 4: $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \ni z \mapsto |z^2/(1+z^2)|$.

Definition 3.13 Sind $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a),$$

falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass $f(x) > 1/\varepsilon$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Entsprechend schreiben wir $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow a$, falls $-f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow a$ gilt.²⁷

Beispiel 3.14 1. Es gilt $|z^d| = |z|^d \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow \omega$ und $1/|z|^d \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow 0$. Für beliebige Polynome p vom Grad $d > 0$ folgt auch (3.1) auch $|p(z)| \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow \omega$.

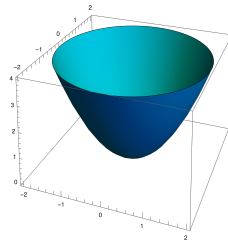


Abbildung 5: $z \mapsto |z^2| = z\bar{z}$.

Für reelle x gilt $x^d \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$ und $x^d \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ je nach dem ob d gerade oder ungerade ist.

2. Ist $|q| > 1$ so gilt für die geometrische Folge (q^n) mit $r := |q| - 1 > 0$ nach der Bernoullischen Ungleichung $|q^n| = |q|^n = (1+r)^n \geq 1+rn > rn \rightarrow +\infty$ und damit auch $|q^n| \rightarrow +\infty$.

Definition 3.15 Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f

- **wachsend**, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$,
- **streng wachsend**, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$,
- **fallend** beziehungsweise **streng fallend**, falls $-f$ wachsend beziehungsweise streng wachsend ist.

Ist f wachsend oder fallend, so sagen wir, f sei **monoton**.

²⁷Man spricht dann auch von bestimmter Divergenz. Wir sprechen nicht vom Grenzwert $+\infty$.

Der folgende Satz zeigt, dass *monotone* Funktionen stets Grenzwerte an $\sup X$ und $\inf X$ besitzen. Der Beweis beruht wesentlich der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Wir schreiben für $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $M \subset X$

$$\sup_M f := \sup_{x \in M} f(x) := \sup f(M) \quad \text{und} \quad \inf_M f := \inf_{x \in M} f(x) := \inf f(M).$$

Satz 3.16 *Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $a := \inf X$, $b := \sup X$.²⁸ Ist f wachsend, so gilt*

$$f(x) \rightarrow \sup_{X \setminus \{b\}} f \quad (x \rightarrow b)$$

falls $b \in X'$ und

$$f(x) \rightarrow \inf_{X \setminus \{a\}} f \quad (x \rightarrow a)$$

falls $a \in X'$. Ist f fallend, so gelten die entsprechenden Aussagen mit \sup statt \inf und \inf statt \sup .

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Die weiteren ergeben sich in analoger Weise. Ist $f(X)$ nach oben beschränkt, so ist $c := \sup_{X \setminus \{b\}} f < +\infty$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $x < b$ mit $f(x) > c - \varepsilon$. Da f wachsend ist, gilt auch

$$c \geq f(x') \geq f(x) > c - \varepsilon$$

für alle x' mit $x < x' < b$. Ist $f(X)$ nach oben unbeschränkt, so ist $\sup_{X \setminus \{b\}} f = +\infty$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x < b$ mit $f(x) > 1/\varepsilon$. Wie vorher ist dann $f(x') \geq f(x) > 1/\varepsilon$ für alle x' mit $x < x' < b$. \square

Bemerkung 3.17 Als Spezialfall des Satzes 3.16 erhält man: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in \mathbb{R} , so gilt

$$x_n \rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

und ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fallend, so gilt

$$x_n \rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Außerdem gilt folgende einfache und wichtige hinreichende Bedingung für die Konvergenz von Folgen in \mathbb{R} , der **Hauptsatz über monotone Folgen**: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und monoton, so ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

²⁸ $a = -\infty$ und $b = +\infty$ sind zugelassen.

Bemerkung und Definition 3.18 Die Folge $x_n := (1 + 1/n)^n$ ist wachsend, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Bernoulli-Ungleichung

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1.$$

Ähnlich kann man zeigen, dass die Folge $y_n := (1 + 1/n)^{n+1}$ fallend ist (Ü)]. Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen sind wegen $2 = x_1 \leq x_n < y_n \leq y_1 = 4$ beide Folgen konvergent und wegen $x_n/y_n = 1 + 1/n \rightarrow 1$ gilt $2 \leq \lim x_n = \lim y_n \leq 4$. Man definiert die **Eulersche Zahl** e als den gemeinsamen Grenzwert, also

$$e := \lim (1 + 1/n)^n.$$

Ist (x_n) eine konvergente Folge, so ist (x_n) beschränkt. Wir betrachten nun allgemeine beschränkte Folgen.

Bemerkung und Definition 3.19 Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R} . Ist

$$b_n := \sup_{j \geq n} x_j \quad (n \in \mathbb{N}),$$

so ist (b_n) fallend mit $b_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$, also konvergent nach dem Hauptsatz über monotone Folgen gegen $\inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$. Den Grenzwert bezeichnet man auch als $\limsup x_n$.²⁹

Beispiel 3.20 Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := (-1)^n(1 + 1/n)$ ist beschränkt (wegen $|x_n| \leq 2$). Hier ist $b_n = 1 + 1/n$ für gerade n und $1 + 1/(n+1)$ für ungerade. Es gilt also $b_n \rightarrow 1$ und damit $\limsup x_n = 1$.

Definition 3.21 Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und ist $J \subset \mathbb{N}$ unendlich, so nennt man $(x_n)_{n \in J}$ eine **Teilfolge** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist $(x_n)_{n \in J}$ konvergent mit Grenzwert c , so schreiben wir $x_n \rightarrow c$ für $n \in J$. Aus der Definition ergibt sich auch sofort: Ist eine Folge konvergent, so ist auch jede Teilfolge konvergent, und zwar mit gleichem Grenzwert. Die Folge (x_n) aus Beispiel 3.20 ist divergent, hat aber die konvergenten Teilfolgen $(x_n)_{n \in J}$ und $(x_n)_{n \in I}$, wobei J die geraden und I die ungeraden Zahlen bezeichnet, mit Grenzwert 1 im ersten und -1 im zweiten Fall.

²⁹Entsprechend bezeichnet man den Grenzwert der (wachsenden und beschränkten) Folge $a_n := \inf_{j \geq n} x_j$ als $\liminf x_n$.

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung für die Analysis.

Satz 3.22 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge in \mathbb{K} besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1. Es sei (x_n) eine Folge in \mathbb{R} . Wir zeigen, dass eine Teilfolge gegen $c := \limsup x_n$ konvergiert. Dazu setzen wir $n_0 := \min N$ und definieren eine Folge $(n_k)_{k=0}^\infty$ in N induktiv: Sind n_0, \dots, n_k definiert, so existiert ein $m > n_k$ mit $c \leq b_m < c + 1/k$ (wobei b_m wie in Bemerkung und Definition 3.19). Aufgrund der Definition von b_m existiert weiter ein $N \ni j \geq m$ mit $b_m - 1/k < x_j \leq b_m$. Mit $n_{k+1} := j$ gilt dann

$$c - 1/k < x_{n_{k+1}} < c + 1/k.$$

Ist $J := \{n_k : k \in \mathbb{N}_0\}$, so gilt $x_n \rightarrow c$ für $n \in J$.

2. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} und $z_n = (s_n, t_n)$. Dann sind die Folgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} beschränkt (es gilt $|s_n| \leq |z_n|$ und $|t_n| \leq |z_n|$). Nach 1. existieren eine Teilfolge $(s_n)_{n \in I}$ von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $s_n \rightarrow b$ für $n \in I$. Wieder nach 1. existieren auch eine Teilfolge $(t_n)_{n \in J}$ von $(t_n)_{n \in I}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $t_n \rightarrow c$ für $n \in J$. Mit Satz 3.10 folgt $z_n = s_n + t_n i \rightarrow b + ci$ für $n \in J$. \square

Bemerkung und Definition 3.23 Es sei $X \subset \mathbb{K}$.

1. X heißt **kompakt**³⁰, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X besitzt. Jede kompakte Menge ist beschränkt (sonst würde eine Folge (x_n) in X mit $|x_n| \rightarrow +\infty$ existieren, die aber keine konvergente Teilfolge hat).

2. X heißt **abgeschlossen**, falls jeder Häufungspunkt zu X gehört, also $X' \setminus \{\omega\} \subset X$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede konvergente Folge in X der Grenzwert in X liegt ([Ü]). Mit Bemerkung 3.11 sieht man, dass insbesondere etwa Intervalle der Form $[a, b]$, $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ und Kreisscheiben

$$B_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq \rho\},$$

wobei $\rho \geq 0$ und $a \in \mathbb{K}$, abgeschlossen sind.

³⁰genauer eigentlich folgenkompakt

Satz 3.24 (Heine-Borel)

$X \subset \mathbb{K}$ ist genau dann kompakt, wenn X beschränkt und abgeschlossen ist.³¹

Beweis. Ist X kompakt, so ist X beschränkt nach Bemerkung und Definition 3.23, und für jede Folge in X , die konvergiert, liegt der Grenzwert in X (da dies für eine Teilfolge gilt). Ist umgekehrt X beschränkt und abgeschlossen, so hat nach den Satz von Bolzano-Weierstraß jede Folge in X eine konvergente Teilfolge und aufgrund der Abgeschlossenheit liegt jeder Grenzwert einer in X konvergenten Folge in X . \square

Bemerkung und Definition 3.25 $X \subset \mathbb{K}$ und ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ und $a \in X' \cap X$, so heißt f **stetig an der Stelle a** , falls $f(x) \rightarrow f(a)$ für $x \rightarrow a$ gilt. Weiter heißt f **stetig**, falls f stetig an jeder Stelle $a \in X$ ist. Mit $C(X)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Konstante Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und die identische Abbildung $f = \text{id}_{\mathbb{C}}$ sind stetig. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$ ist nicht stetig an der Stelle 0, aber stetig an allen $a \neq 0$.

Bemerkung 3.26 Aus Satz 3.10 erhält man: Ist $X \subset \mathbb{K}$ und sind f, g stetig an $a \in X$, so sind $f \pm g$, $f \cdot g$ und für nullstellenfreies g auch f/g stetig an der Stelle a . In Verbindung mit Bemerkung und Definition 3.25 sieht man, dass Polynome und rationale Funktionen stetig sind.

Satz 3.27 Es seien $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow a$. Weiter seien $U \subset \mathbb{K}$, $v \in U'$ und $\varphi : U \rightarrow X$ mit $\varphi(u) \rightarrow a$ für $u \rightarrow v$.

1. Ist $a \notin \varphi(U)$, so gilt $(f \circ \varphi)(u) \rightarrow c$ für $u \rightarrow v$.
2. Ist $a \in \varphi(U)$ und ist f stetig an a , so gilt $(f \circ \varphi)(u) \rightarrow f(a)$ für $u \rightarrow v$.

Beweis. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\eta > 0$ mit

$$|f(x) - c| < \varepsilon \quad (x \in \dot{U}_\eta(a)). \quad (3.3)$$

³¹Äquivalent ist übrigens auch $X' \subset X$.

Weiter existiert ein $\delta > 0$ so, dass $\varphi(u) \in U_\eta(x)$ für $u \in \dot{U}_\delta(v)$. Ist $a \notin \varphi(U)$, so ergibt sich $|f(\varphi(u)) - c| < \varepsilon$ für $u \in \dot{U}_\delta(v)$. Ist f stetig an a , so ist (3.3) mit $c = f(a)$ und für $x = a$ erfüllt, also $|f(\varphi(u)) - f(a)| < \varepsilon$ für $u \in \dot{U}_\delta(v)$. \square

Bemerkung 3.28 Insbesondere ergibt sich aus Satz 3.27, dass die Komposition $f \circ \varphi$ stetiger Funktionen $\varphi : U \rightarrow X$ und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. Außerdem ergibt sich durch Anwendung auf Folgen $\varphi = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dass Stetigkeit von f Folgenstetigkeit impliziert, d. h. es gilt $f(x_n) \rightarrow f(a)$ für alle Folgen (x_n) mit $x_n \rightarrow a$. Umgekehrt folgt aus Folgenstetigkeit auch Stetigkeit.

Denn: Angenommen. f ist nicht stetig an a . Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ und $|x_n - a| < 1/n$. Für die so gefundene Folge (x_n) gilt $x_n \rightarrow a$, aber die Folge $(f(x_n))$ konvergiert nicht gegen $f(a)$.

Ein hohes Gut sind Aussagen über Bildmengen stetiger Funktionen.

Satz 3.29 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $f(X)$ ebenfalls kompakt.*

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $f(X)$. Wir wählen $x_n \in X$ mit $y_n = f(x_n)$. Da X kompakt ist, existieren ein $a \in X$ und eine Teilfolge $(x_n)_{n \in I}$ von (x_n) mit $x_n \rightarrow a$ für $n \in I$. Da f stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \rightarrow f(a) \in f(X)$ für $n \in I$. \square

Wir betrachten reellwertige Funktionen und kommen zu einer weiteren Aussage über Bildmengen, die die Lösbarkeit von Gleichungen in \mathbb{R} nach sich zieht. Der Beweis beruht wieder ganz wesentlich auf der Vollständigkeit von \mathbb{R} .

Satz 3.30 (Zwischenwertsatz)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall, d. h. zu jedem $y \in \mathbb{R}$ mit $\inf_I f < y < \sup_I f$ existiert ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = y$.

Beweis. Zunächst existieren nach Definition des Supremums und des Infimums $u, v \in f(I)$ mit $u < y < v$. Wir wählen $a, b \in I$ mit $f(a) = u$ und $f(b) = v$, wobei wir ohne Einschränkung $a < b$ annehmen. Da I ein Intervall ist, ist $[a, b] \subset I$. Wir setzen

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}.$$

Dann ist $M \neq \emptyset$ (da $a \in M$) und beschränkt, also existiert $\xi := \sup M$. Dabei ist $\xi \in [a, b]$, also auch $\xi \in I$ und $\xi \in M \cup M'$. Ist $\xi \in M$, so gilt $f(\xi) \leq y$ nach Definition von M . Ist $\xi \in M'$, so gilt $f|_M(x) \rightarrow f(\xi)$ für $x \rightarrow \xi$ wegen der Stetigkeit von f an ξ . Aus $f(x) \leq y$ für alle $x \in M$ ergibt sich wieder $f(\xi) \leq y$, jetzt mit Bemerkung 3.11. Also ist stets $f(\xi) \leq y$. Insbesondere ist $\xi < b$ und mit $y < f|_{(\xi, b)}(x) \rightarrow f(\xi)$ für $x \rightarrow \xi$ damit auch $y \leq f(\xi)$, wieder nach Bemerkung 3.11. Also ist insgesamt $f(\xi) = y$. \square

Satz 3.31 (k -te Wurzeln)

Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(x) = x^k$ bijektiv. Man schreibt $\sqrt[k]{y} := f^{-1}(y)$ für $y \geq 0$.

Beweis. Mit $I := [0, \infty)$ gilt $0 = f(0) \in f(I)$ und aus $f(x) = x^k \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$ folgt $\sup_I f = \infty$. Da f stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz zu jedem $y \geq 0$ ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = y$, also existiert $\sqrt[k]{y}$. \square

Streng wachsende oder fallende Funktionen auf Intervallen I sind bijektive Abbildungen $f : I \rightarrow W(I)$. Obwohl solche f im Allgemeinen nicht stetig sind, gilt

Satz 3.32 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f : I \rightarrow W(f)$ streng wachsend. Dann ist $f^{-1} : W(I) \rightarrow \mathbb{R}$ streng wachsend und auf $(W(I))'$ stetig.³²*

Beweis. Wir setzen $J := W(f)$. Angenommen, es existieren $u, v \in J$ mit $u < v$ und $s := f^{-1}(u) \geq f^{-1}(v) =: t$. Dann gilt $u = f(s) \geq f(t) = v$, da f (streng) wachsend ist. Widerspruch! Also ist $f^{-1} : J \rightarrow I$ streng wachsend.

Wir zeigen die Stetigkeit: Dazu seien $u \in J$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $t := f^{-1}(u)$. Ist $t \neq \sup I$, so existiert ein $h = h_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ mit $t+h \in I$. Mit $\delta^+ := \delta_\varepsilon^+ := f(t+h) - u > 0$ gilt für alle $v \in J$ mit $u \leq v < u + \delta^+ = f(t+h)$

$$0 \leq f^{-1}(v) - f^{-1}(u) < f^{-1}(u + \delta^+) - f^{-1}(u) = t + h - t = h < \varepsilon.$$

³²eine entsprechende Aussage gilt natürlich für fallende f .

Ist $t \neq \inf I$, so sieht man entsprechend: Es existiert ein $\delta^- > 0$ so, dass

$$0 \leq f^{-1}(u) - f^{-1}(v) < \varepsilon$$

für alle $v \in J$ mit $u - \delta^- < v \leq u$. Damit ergibt sich $|f^{-1}(v) - f^{-1}(u)| < \varepsilon$ für alle $v \in J$ mit $|v - u| < \delta := \min\{\delta^+, \delta^-\}$. \square

Definition 3.33 Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Man sagt, f wird **maximal** (oder f hat ein **Maximum**), falls

$$\max_X f := \max_{x \in X} f(x) := \max f(X)$$

existiert. Ist $x_0 \in X$ so, dass $f(x_0) = \max_X f$ gilt, so sagt man, dass f an x_0 maximal wird (oder dass f an x_0 das Maximum annimmt).

2. Man sagt, f wird **minimal** (oder f hat ein **Minimum**), falls

$$\min_X f := \min_{x \in X} f(x) := \min f(X)$$

existiert. Ist $x_0 \in X$ so, dass $f(x_0) = \min_X f$ gilt, so sagt man, dass f an x_0 minimal wird (oder dass f an x_0 das Minimum annimmt).

3. Ist $M \subset X$, so sagt man, dass f **maximal auf M** wird, falls $f|_M$ ein Maximum hat. Entsprechend sagt man auch, f wird **minimal auf M** , falls $f|_M$ ein Minimum hat.

Beispiel 3.34 1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ wird wegen $f(x) \geq 0 = f(0)$ minimal. Da $f(X) = [0, \infty)$ nach oben unbeschränkt ist, wird f nicht maximal.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x/(1 + |x|)$ ist beschränkt und stetig, wird aber weder maximal noch minimal.

3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/(1 + x^2)$ wird wegen $f(x) \leq 1 = f(0)$ maximal, aber nicht minimal.

Ist $X \subset \mathbb{R}$, so ist wegen $\sup X \subset X \cup X'$ und $\inf X \subset X \cup X'$ ([Ü]) für kompakte X stets $\sup X = \max X$ und $\inf X = \min X$. In Verbindung mit Satz 3.29 erhält man

Satz 3.35 *Es seien $X \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann wird f sowohl maximal als auch minimal.*

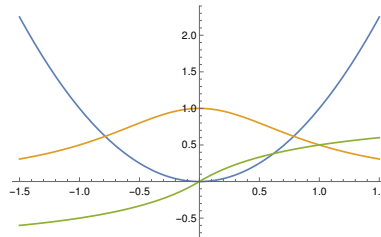


Abbildung 6: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x/(1 + |x|)$, $x \mapsto 1/(1 + x^2)$.

Definition 3.36 Ist $X \subset \mathbb{K}$ und ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, so heißt f **gleichmäßig stetig**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für $|x - x'| < \delta$.

Satz 3.37 Ist $X \subset \mathbb{K}$ kompakt und ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, x'_n \in X$ existieren mit $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ und $|x_n - x'_n| < 1/n$. Die Folge (x_n) hat eine konvergente Teilfolge $(x_n)_{n \in I}$ mit Grenzwert $c \in X$. Wegen $|x_n - c| \leq |x_n - x'_n| + |x'_n - c| < 1/n + |x'_n - c|$ konvergiert auch $(x'_n)_{n \in I}$ gegen c . Da f (folgen-)stetig ist, erhält man die widersprüchliche Aussage

$$\varepsilon \leq |f(x'_n) - f(x_n)| \leq |f(x'_n) - f(c)| + |f(c) - f(x_n)| \rightarrow 0$$

für $n \in I$.

□

4 Reihen und die Exponentialfunktion

Bemerkung und Definition 4.1 Es sei $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge in \mathbb{K} . Die Folge $(s_n)_{n \geq m}$ der **Partialsommen** oder **Teilsommen**

$$s_n := \sum_{k=m}^n a_k =: a_m + \cdots + a_n \quad (n \geq m)$$

heißt (die mit der Folge (a_n) gebildete) **Reihe**. Die a_k heißen dann **Reihenglieder**. Ist die Folge (s_n) konvergent, so heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ der **Reihenwert** und man schreibt

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Traditionell wird neben dem Reihenwert auch die Teilsommenfolge (s_n) mit $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Das ist ganz praktisch, weil man dann kurz von Konvergenz oder Divergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ sprechen kann. Man beachte aber, dass das Symbol $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ damit zwei Bedeutungen hat: Erstens steht es für die Folge (s_n) der Teilsommen und zweitens (im Falle der Konvergenz!) für ihren Grenzwert.³³ Ist $k > m$, so ist $\sum_{k=k}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert, und in diesem Fall ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=m}^{k-1} a_k + \sum_{k=k}^{\infty} a_k$. Für Konvergenzuntersuchungen ist es also unwichtig, wie die untere Summationsgrenze aussieht.

Beispiel 4.2 1. Es sei $q \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ eine **geometrische Reihe**. Für $|q| < 1$ gilt nach der geometrischen Summenformel $\sum_{k=0}^n q^k = (1 - q^{n+1})/(1 - q) \rightarrow 1/(1 - q)$ ($n \rightarrow \infty$). Also ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$ konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

³³Allgemeiner betrachtet man auch Reihen in normierten Räumen. Sind $(X, |\cdot|_E)$ ein normierter Raum (siehe Lineare Algebra), $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge in X und (s_n) die Folge der Partialsommen, so heißt die Reihe konvergent, falls ein $c \in X$ existiert mit $|s_n - c|_E \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Man verwendet dann die entsprechenden Schreibweisen.

Für $q = 1/2$ ergibt sich $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 2$ und damit auch $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$. Abbildung 7 veranschaulicht die letzte Reihe als Grenzwert der Teilsummenfolge in Form von Rechteckflächen. Die grau unterlegte Fläche entspricht der Teilsumme s_5 .

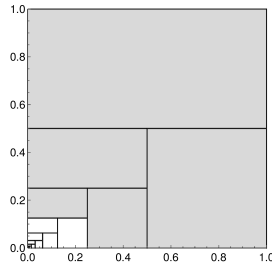


Abbildung 7: Veranschaulichung von $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$.

2. Nach Beispiel 1.19 gilt $\sum_{k=1}^{n-1} 1/(k(k+1)) = 1 - 1/n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Bemerkung 4.3 Durch Anwendung von Satz 3.10 ergibt sich leicht: Sind $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen in \mathbb{K} und ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so sind auch $\sum_{k=m}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=m}^{\infty} \lambda a_k$ konvergent mit

$$\sum_{k=m}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Beispiel 4.4 Mit Beispiel 4.2 und Bemerkung 4.3 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k + 4}{5^k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^k} + 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} = 2 \cdot \frac{1}{1 - 3/5} + 4 \cdot \frac{1}{1 - 1/5} = 10.$$

Bemerkung 4.5 Eine *notwendige* Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, das heißt, ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Denn: Mit $s_n := \sum_{k=m}^n a_k$ und $s := \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ gilt $a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Beispiel 4.6 1. Ist $a_n = q^n$ mit $|q| \geq 1$, so ist $|a_n| \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$), also ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ sicher divergent. Damit ergibt sich für geometrische Reihen insgesamt: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist *genau dann* konvergent, wenn $|q| < 1$ ist.

2. Wir betrachten die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$. Hier ist $(a_n) = (1/n)$ eine Nullfolge. Wegen

$$t_m := \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} 1/k \geq 2^{m-1}/2^m = 1/2$$

gilt

$$s_{2^k} = \sum_{k=1}^{2^k} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{m=1}^k t_m \geq 1 + k/2 \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Also ist (s_n) unbeschränkt, und damit ist die harmonische Reihe divergent. Das Beispiel zeigt, dass die notwendige Bedingung $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) aus Bemerkung 4.5 im Allgemeinen *nicht hinreichend* für die Konvergenz der mit a_n gebildeten Reihe ist.

Von fundamentaler Bedeutung für die Analysis ist

Satz 4.7 *Es sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in \mathbb{K} . Ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.*

Beweis. Zunächst gilt für die Teilsummen s_n mit der Dreiecksungleichung

$$|s_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist (s_n) beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existieren ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Teilfolge $(s_m)_{m \in I}$ mit $s_m \rightarrow s$ für $m \rightarrow \infty$.

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $R > 0$ mit

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \quad (m > R).$$

Wählt man $m \in I$ mit $|s_m - s| < \varepsilon$ und $m > R$, so erhält man für $n \geq m$

$$|s_n - s| \leq |s_n - s_m| + |s_m - s| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| + |s_m - s| < 2\varepsilon.$$

Damit gilt $s_n \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$. □

Bemerkung und Definition 4.8 Es sei $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge in \mathbb{K} . Die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Nach Satz 4.7 ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent. Außerdem gilt dann

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k|. \quad (4.4)$$

Ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent und ist $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$ divergent, so heißt $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ **bedingt konvergent**.

Wir wollen zeigen, dass es konvergente Reihen gibt, die nicht absolut konvergieren. Dazu betrachten wir alternierende Reihen, d. h. Reihen der Form $\sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_n \geq 0$.

Satz 4.9 *Es sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine fallende Folge in $[0, \infty)$.*

1. Für $s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ gilt $s_n \geq 0$ mit fallender Teilfolge $(s_n)_{n \in 2\mathbb{N}_0}$ und wachsender Teilfolge $(s_n)_{n \in 2\mathbb{N}_0+1}$.
2. (**Leibniz-Kriterium**) Ist (a_n) eine Nullfolge, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

Beweis. 1. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \geq 0$$

und damit auch $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq 0$. Weiter gilt für $n \geq 2$

$$s_n - s_{n-2} = (-1)^{n-1}(a_{n-1} - a_n) \begin{cases} \leq 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \geq 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Damit ist $(s_n)_{n \in 2\mathbb{N}_0}$ fallend und $(s_n)_{n \in 2\mathbb{N}_0+1}$ wachsend.

2. Nach 1. und dem Hauptsatz über monotone Folgen existiert ein $s \in [0, \infty)$ mit $s_n \rightarrow s$ ($2\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty$). Dann gilt auch $s_{n+1} = s_n - a_{n+1} \rightarrow s$ ($2\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty$). Zusammen ergibt sich $s_n \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$. \square

Beispiel 4.10 Während die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ nach Beispiel 4.6 divergiert, konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ nach Satz 4.9.

Im Falle von Reihen mit nichtnegativen Gliedern, wie etwa der harmonischen Reihe, können nur zwei wesentlich unterschiedliche Situationen auftreten.

Bemerkung 4.11 Ist (a_n) eine Folge in $[0, \infty)$, also $a_n \geq 0$ für alle n , so ist die Teilsummenfolge (s_n) wachsend. Damit ist entweder (s_n) beschränkt und dann konvergent nach dem Hauptsatz über monotone Folgen mit $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n < \infty$ oder (s_n) unbeschränkt mit $s_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Man schreibt im zweiten Fall auch $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \infty$.

Bemerkung und Definition 4.12 (Majorantenkriterium) Es seien $(a_n)_{n \geq m}$ und $(b_n)_{n \geq k}$ Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle genügend großen n . Man nennt dann $\sum_{k=k}^{\infty} b_k$ eine **Majorante** von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Ist $\sum_{k=k}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist auch $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent.

Denn: Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für $n \geq n_0$. Aus

$$\sum_{k=n_0}^n a_k \leq \sum_{k=n_0}^n b_k \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k \quad (n \geq n_0)$$

folgt die Beschränktheit der Teilsummen $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$. Nach Bemerkung

4.11 ist $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergent und damit auch $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$.

Beispiel 4.13 (Allgemeine harmonische Reihen) Nach Beispiel 4.6 ist $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$. Ist andererseits $1 < d \in \mathbb{N}$, so gilt $1/k^d \leq 1/k^2 \leq 1/((k-1)k)$ für $k \geq 2$. Nach Beispiel 4.2 ist $\sum_{k=2}^{\infty} 1/((k-1)k)$ konvergent, also konvergente Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^d$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^d$.

Wählt man als spezielle Majorante eine geometrische Reihe, so erhält man weitere Konvergenzkriterien:

Satz 4.14 (Wurzelkriterium und Quotientenkriterium)

Es sei $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge in $[0, \infty)$. Dann ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

1. Es existiert ein $q < 1$ mit $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ für alle genügend großen n .
2. Es existiert ein $q < 1$ mit $a_n > 0$ und $a_{n+1}/a_n \leq q$ für alle genügend großen n .

Beweis. 1. Nach Voraussetzung ist $0 \leq a_n \leq q^n$ für alle genügend großen n . Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ folgt die Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ mit Bemerkung 4.12.

2. Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n > 0$ und $a_{n+1}/a_n \leq q$ für $n \geq n_0$. Induktiv ergibt sich mit $\lambda := a_{n_0} q^{-n_0}$

$$a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0} = \lambda q^n \quad (n \geq n_0).$$

Wie in 1. folgt damit die Behauptung aus der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$. □

Bemerkung 4.15 Sind $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge in $[0, \infty)$ mit $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow r < +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), so ist die Bedingung 1. aus Satz 4.14 für jedes $q > r$ erfüllt. Also ist die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ im Falle $r < 1$ konvergent. Aus $a_{n+1}/a_n \rightarrow r$ ($n \rightarrow \infty$) folgt zudem $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow r$ ($n \rightarrow \infty$).

Denn: Ist $\varepsilon > 0$, so sieht man wie im Beweis zum Quotientenkriterium, dass ein $\lambda > 0$ existiert mit $\lambda(r - \varepsilon)^n \leq a_n \leq \lambda(r + \varepsilon)^n$ für n genügend groß. Wegen $\sqrt[n]{\lambda} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) gilt $r - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq r + \varepsilon$ für n genügend groß.

Bemerkung und Definition 4.16 Es sei $c_n := 1/n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}^*$. Wegen

$$\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n} = \frac{z}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent. Konvergenz gilt natürlich auch für $z = 0$. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

heißt **Exponentialfunktion**. Nach Definition ist $\exp(0) = 1$ und zudem $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Allgemeiner gilt $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ([Ü]).

Wir wollen Eigenschaften der Exponentialfunktion herleiten, die von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik sind.

Satz 4.17 Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Beweis. Für $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $J_n := \{(\mu, k) \in \{0, \dots, n\}^2 : \mu+k \geq n+1\}$ sowie $r_n := \sum_{(k, \mu) \in J_n} z^k w^\mu / (k! \mu!)$. Dann gilt mit der binomischen Formel

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{\mu=0}^n \frac{w^\mu}{\mu!} \right) &= \sum_{k, \mu \leq n} \frac{z^k w^\mu}{k! \mu!} = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{k, \mu \leq n, k+\mu=k} \frac{z^k w^\mu}{k! \mu!} \\ &= r_n + \sum_{k=0}^n \sum_{k=0}^k \frac{z^k w^{k-k}}{k!(k-k)!} = r_n + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (z+w)^k =: r_n + s_n. \end{aligned}$$

Die Folge auf der linken Seite konvergiert gegen $\exp(z)\exp(w)$ für $n \rightarrow \infty$ und (s_n) gegen $\exp(z+w)$. Daher reicht es zu zeigen, dass (r_n) eine Nullfolge ist. Wieder mit binomischer Formel gilt

$$|r_n| \leq \sum_{(\mu, k) \in J_n} \frac{|z|^k |w|^\mu}{k! \mu!} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{k=0}^k \frac{|z|^k |w|^{k-k}}{k!(k-k)!} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k!} (|z| + |w|)^k.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} (|z| + |w|)^k / k!$ konvergiert die Folge auf der rechten Seite nach dem Cauchyriterium gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Also gilt auch $r_n \rightarrow 0$. \square

Bemerkung und Definition 4.18 Wegen

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$$

gilt

$$\exp(-z) = 1/\exp(z)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\exp(z) \neq 0$. Induktiv ergibt sich aus Satz 4.17 damit auch

$$\exp(mz) = (\exp(z))^m \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Für $|z| \leq 1$ gilt weiterhin

$$\left| \frac{\exp(z) - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{(k+2)!} \leq |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0).$$

Insbesondere ist \exp stetig an 0. Für allgemeines $a \in \mathbb{C}$ gilt damit

$$\exp(z) = \exp(a) \cdot \exp(z - a) \rightarrow \exp(a) \quad (z \rightarrow a)$$

Damit ist \exp stetig.

Satz 4.19 Die Funktion $\exp|_{\mathbb{R}}$ ist streng wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Außerdem gilt $\exp(t)/t^n \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) für alle $n \in \mathbb{N}$.³⁴

Beweis. Aus

$$\exp(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x$$

für $x \geq 0$ und $\exp -x = 1/\exp(x)$ folgt $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$ und zudem $\exp(t) \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow +\infty$ sowie $\exp(t) = 1/\exp(-t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz ist $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Für $s < t$ ergibt sich $\exp(t)/\exp(s) = \exp(t - s) \geq 1 + (t - s) > 1$ und damit $\exp(t) > \exp(s)$. Also ist $\exp|_{\mathbb{R}}$ streng wachsend. Schließlich ist für $n \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ auch $\exp(t) \geq t^{n+1}/(n+1)!$ und damit folgt $\exp(t)/t^n \geq t/(n+1)! \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow +\infty$. \square

³⁴Eine Variante von exponentiell vs. polynomial.

Bemerkung und Definition 4.20 Nach Satz 4.19 und Satz 3.32 existiert die Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathbb{R}}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ und ist dort stetig und streng wachsend. Diese Funktion nennt man die (natürliche) **Logarithmusfunktion** und schreibt dafür \ln oder auch \log . Aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ergibt sich leicht ([Ü]):

1. Für alle $s, t > 0$ ist $\ln(st) = \ln(s) + \ln(t)$.
2. Für alle $t > 0$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ ist $\ln(t^m) = m \ln(t)$.

Bemerkung 4.21 Mit 4.18 erhält man

$$\frac{1}{n \ln(1 + 1/n)} = \frac{\exp(\ln(1 + 1/n)) - 1}{\ln(1 + 1/n)} \rightarrow 1,$$

also auch $\ln((1 + 1/n)^n) \rightarrow 1$. Wegen der Stetigkeit von \ln ist damit $\ln(e) = 1$ bzw. $\exp(1) = e$.

Definition 4.22 Nach Bemerkung 4.20 ist für $a > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$

$$a^m = \exp(\ln(a^m)) = \exp(m \ln a).$$

Man definiert für allgemeines $z \in \mathbb{C}$

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a).$$

Insbesondere ist $\exp(z) = e^z$. Aus den Rechenregeln für \ln und \exp erhält man zudem $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ für $a > 0$.

Satz 4.23 *Es seien $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$a^z a^w = a^{z+w}, \quad a^z b^z = (ab)^z \quad \text{und} \quad (a^c)^z = a^{cz}.$$

Beweis. Es gilt

$$a^z a^w = e^{z \ln a} e^{w \ln a} = e^{z \ln a + w \ln a} = e^{(z+w) \ln a} = a^{z+w}$$

und

$$a^z b^z = e^{z \ln a} e^{z \ln b} = e^{z(\ln a + \ln b)} = e^{z \ln(ab)} = (ab)^z.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ ist $a^c = e^{c \ln a} > 0$ und damit $(a^c)^z = e^{z \ln(e^{c \ln a})} = e^{cz \ln a} = a^{cz}$. □

5 Trigonometrische Funktionen und Wurzeln

Bemerkung und Definition 5.1 Die Funktion $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\cos z := \cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad (z \in \mathbb{C}),$$

heißt **Kosinusfunktion**. Die Funktion $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\sin z := \sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad (z \in \mathbb{C}),$$

heißt **Sinusfunktion**. Damit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ die **Eulersche Formel**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (5.1)$$

Außerdem ergibt sich für $t \in \mathbb{R}$ mit $e^{-it} = e^{i\bar{t}} = \overline{e^{it}}$

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + \overline{e^{it}}) = \operatorname{Re}(e^{it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - \overline{e^{it}}) = \operatorname{Im}(e^{it})$$

und damit auch $1 = e^{it}e^{-it} = |e^{it}|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$.

Bemerkung 5.2 Aus der Stetigkeit von \exp ergibt sich unmittelbar die Stetigkeit von \cos und \sin . Weiter folgt aus der jeweiligen Definition sofort $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ und $\cos(-z) = \cos z$ sowie $\sin(-z) = -\sin z$. Schließlich gilt

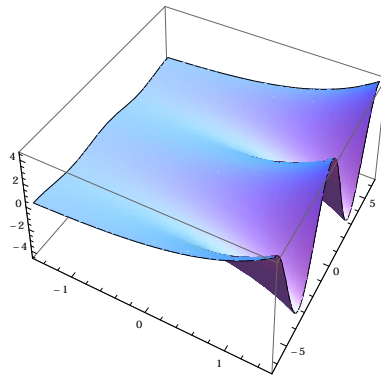


Abbildung 8: $s + it \mapsto \operatorname{Re}(e^{s+it}) = e^s \cos(t)$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

mit absoluter Konvergenz der Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ ([Ü]). Abbildung 8 zeigt den Realteil der komplexen Exponentialfunktion. Das Schwingungsverhalten der reellen Kosinusfunktion spiegelt sich wider im Verhalten des Realteils der Exponentialfunktion entlang der imaginären Achse.

Satz 5.3 (Additionstheoreme)

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

und

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Beweis. Wegen $(u + 1)(v + 1) + (u - 1)(v - 1) = 2(uv + 1)$ für $u, v \in \mathbb{C}$ ergibt sich mit $u = e^{2iz}$ und $v = e^{2iw}$

$$\begin{aligned} (e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw}) &= 2e^{-iz}e^{-iw}(e^{2iz}e^{2iw} + 1) \\ &= 2(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}). \end{aligned}$$

Nach Division durch 4 ergibt sich die erste Aussage. Die zweite erhält man entsprechend mit $(u - 1)(v + 1) + (u + 1)(v - 1) = 2(uv - 1)$. \square

Bemerkung 5.4 Speziell ergibt sich mit $w = -z$ aus dem ersten Additionstheorem mit Bemerkung 5.2 die Identität $\cos^2 + \sin^2 = 1$ auch auf \mathbb{C} .

Wir nutzen nun den Zwischenwertsatz und damit einmal mehr die Vollständigkeit von \mathbb{R} , um die Kreiszahl π zu definieren. Dazu beweisen wir vorbereitend

Satz 5.5 Für $t \in (0, \sqrt{6})$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$0 < \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sin t \leq \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq t.$$

Außerdem existiert ein $\xi \in (0, 2)$ mit $\cos(\xi) = 0$.

Beweis. 1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in (0, \sqrt{6})$ setzen wir $a_n(t) := t^{2n+1}/(2n+1)!$ und $s_n(t) := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Wegen $a_n(t)/a_{n-1}(t) = t^2/(2n(2n+1)) \leq t^2/6 < 1$ für $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n(t))$ fallend. Also folgt aus Satz 4.9

$$0 < t(1 - t^2/6) = s_1(t) \leq s_{2m+1}(t) \leq \sin t \leq s_{2m}(t) \leq s_0(t) = t \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

2. Nach 1. ist $\sin 1 \geq s_1(1) = 5/6 > 1/\sqrt{2}$. Also ist $\cos^2 1 = 1 - \sin^2 1 < 1/2$. Da \cos stetig ist mit $\cos(0) = 1$, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\tau \in (0, 1)$ mit $\cos \tau = 1/\sqrt{2}$. Damit ist wegen $\sin \tau \geq 0$ auch $\sin \tau = 1/\sqrt{2}$, also

$$e^{2i\tau} = (e^{i\tau})^2 = (\cos \tau + i \sin \tau)^2 = (1 + i)^2/2 = i.$$

Für $\xi = 2\tau$ ist $\cos(\xi) = \operatorname{Re}(e^{i\xi}) = 0$. □

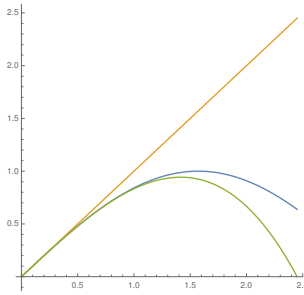


Abbildung 9: $t \mapsto \sin t$ (blau), $t \mapsto t$ und $t \mapsto t(1 - t^2/6)$.

Bemerkung und Definition 5.6 Nach Satz 5.5 ist $M := \{t > 0 : \cos t = 0\} \subset (0, \infty)$ nichtleer. Wir definieren die **Kreiszahl** π als

$$\pi := 2 \cdot \inf M \in [0, 4).$$

Aus der Stetigkeit von \cos folgt $\inf M = \min M$, also

$$\cos(\pi/2) = 0$$

und insbesondere $\pi/2 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz sowie $\cos t = \cos(-t)$ ist $\cos t > 0$ für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aus $1 = \cos^2(\pi/2) + \sin^2(\pi/2) = \sin^2(\pi/2)$ und $\sin(\pi/2) > 0$ ergibt sich

$$\sin(\pi/2) = 1$$

und damit $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$, also auch $e^{i\pi} = -1$ ³⁵ und $e^{2i\pi} = 1$.

Bemerkung und Definition 5.7 1. Sind $(X, +)$ eine Halbgruppe, $a \in X$ und $f : X \rightarrow Y$, so definieren wir $\sigma_a f : X \rightarrow Y$ durch

$$(\sigma_a f)(x) := f(x + a) \quad (x \in X).$$

Man nennt f **periodisch** mit **Periode** a (oder kurz a -periodisch), falls $\sigma_a f = f$ gilt, d. h. falls $f(x + a) = f(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt ist.

2. Für die Exponentialfunktion gilt $\sigma_a \exp = e^a \exp$ für alle $a \in \mathbb{C}$. Mit Bemerkung und Definition 5.6 erhält man damit $\sigma_{\pm i\pi/2} \exp = \pm i \exp$ sowie $\sigma_{i\pi} \exp = -\exp$ und $\sigma_{2i\pi} \exp = \exp$. Insbesondere ist \exp periodisch mit Periode $2i\pi$.

Satz 5.8 *Es gilt*

1. $\sigma_{\pi/2} \cos = -\sin$, $\sigma_{\pi} \cos = -\cos$ und $\sigma_{2\pi} \cos = \cos$
2. $\sigma_{\pi/2} \sin = \cos$, $\sigma_{\pi} \sin = -\sin$ und $\sigma_{2\pi} \sin = \sin$.

Beweis. Nach Bemerkung und Definition 5.7 ist

$$2 \cos(z + \pi/2) = e^{iz+i\pi/2} + e^{-iz-i\pi/2} = ie^{iz} - ie^{-iz} = -2 \sin z.$$

Entsprechend ergeben sich die weiteren Aussagen. □

Aus folgendem Satz ergibt sich in Kombination mit dem vorhergehenden die Monotonie von \cos auf Intervallen der Form $[0, \pi] + k\pi$ und von \sin auf $[-\pi/2, \pi/2] + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 5.9 *Es gilt*

1. $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ ist streng wachsend mit $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.
2. $\cos|_{[0, \pi]}$ ist streng fallend mit $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

³⁵Die Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ kombiniert über die imaginäre Einheit i in eleganter Weise die reellen Zahlen $0, 1, e$ und π .

Beweis. 1. Wegen $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin(-\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$ ergibt sich mit dem Zwischenwertsatz $\sin([-\pi/2, \pi/2]) \supset [-1, 1]$. Aus dem 2. Additionstheorem folgt für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\sin(z+w) - \sin(z-w) = 2 \cos(z) \sin(w) .$$

Also ergibt sich für $s, t \in \mathbb{R}$

$$\sin(2t) - \sin(2s) = \sin(t+s+t-s) - \sin(t+s-(t-s)) = 2 \cos(t+s) \sin(t-s) .$$

Ist $-\pi/4 \leq s < t \leq \pi/4$, so gilt $t+s \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $t-s \in (0, \pi/2]$. Nach Bemerkung 5.6 ist $\cos(t+s)$ positiv und mit Satz 5.8 auch $\sin(t-s)$. Also ist $\sin(2s) < \sin(2t)$. Damit ist $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ streng wachsend und $\sin([-\pi/2, \pi/2]) \subset [-1, 1]$.

2. Die zweite Aussage folgt aus 1. mit Satz 5.8. \square

Bemerkung und Definition 5.10 Die nach Satz 3.32 und Satz 5.9 auf $[-1, 1]$ existierende, streng wachsende und stetige Umkehrfunktion von $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ heißt **Arkussinus** (kurz arcsin). Entsprechend bezeichnet man die auf $[-1, 1]$ existierende und dort streng fallende und stetige Umkehrfunktion von $\cos|_{[0, \pi]}$ mit **Arkuskosinus** (kurz arccos). Weiterhin kann man zeigen, dass \tan streng wachsend in $(-\pi/2, \pi/2)$ und \cot streng fallend in $(0, \pi)$ sind mit $W(\tan|_{(-\pi/2, \pi/2)}) = W(\cot|_{(0, \pi)}) = \mathbb{R}$ (\ddot{U}). Also existieren auf \mathbb{R} die – dort stetigen – Umkehrfunktionen, genannt **Arkustangens** (kurz arctan) beziehungsweise **Arkuskotangens** (kurz arccot), mit entsprechenden Monotonieeigenschaften.

Hinsichtlich der Nullstellen der trigonometrischen Funktionen gilt

Satz 5.11 *Es gilt*

1. $Z(\exp -1) = 2\pi i\mathbb{Z}$.
2. $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ und $Z(\cos) = \pi\mathbb{Z} + \pi/2$.

Beweis. 1. Aus der $2\pi i$ -Periodizität von \exp und $e^0 = 1$ folgt $Z(\exp -1) \supset 2\pi i\mathbb{Z}$.

\subset : Da \cos streng fallend auf $[0, \pi]$ ist und $\cos(2\pi - t) = \cos(-t) = \cos t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\cos(t) < 1$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, also $e^{it} \neq 1$ für $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Ist nun $z = s + it$

mit $e^z = 1$, so gilt $1 = |e^z| = e^s |e^{it}| = e^s$ und folglich $s = 0$. Damit ist $e^{it} = 1$, also $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, das heißt $z = it \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

2. Es gilt $0 = 2i \sin z = e^{iz} - e^{-iz}$ genau dann, wenn $e^{2iz} - 1 = 0$ ist. Aus 1. ergibt sich damit $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ und mit Satz 5.8 dann auch $Z(\cos) = \pi\mathbb{Z} + \pi/2$. \square

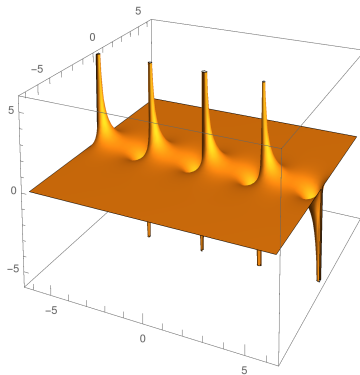


Abbildung 10: $z \mapsto \operatorname{Re}(\cot z)$

Bemerkung und Definition 5.12 Die **Tangensfunktion** $\tan : \mathbb{C} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \pi/2) \rightarrow \mathbb{C}$ und die **Kotangensfunktion** $\cot : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

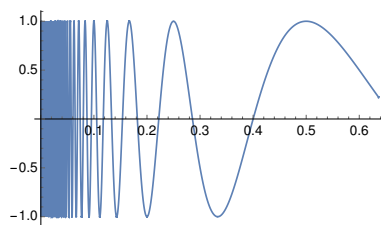
Da Quotienten stetiger Funktionen stetig sind, sind mit Bemerkung 5.2 die Funktionen \tan und \cot stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

Beispiel 5.13 Es sei $f, g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \cos(\pi/z) \quad (z \neq 0).$$

Dann gilt $Z(f) = \{(n + 1/2)^{-1} : n \in \mathbb{Z}\}$. Insbesondere hat f in jeder Umgebung von 0 unendlich viele Nullstellen. Die Funktion $f|_{(0, \infty)}$ hat keinen Grenzwert an 0.

Wir haben bereits gesehen, dass die komplexe Exponentialfunktion nullstellenfrei ist. Wir zeigen nun, dass jede komplexe Zahl $w \neq 0$ als Funktionswert angenommen wird.

Abbildung 11: $t \mapsto \cos(\pi/t)$

Satz 5.14 *Es gilt $\exp(i\mathbb{R}) = \mathbb{S}$ und $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.*

Beweis. 1. Nach Bemerkung 5.1 ist $\exp(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$. Wir zeigen \supset . Dazu sei $w \in \mathbb{S}$ mit Normalform $u + iv$. Ohne Einschränkung können wir $v \geq 0$ annehmen (ist $e^{it} = u + iv$, so ist $e^{-it} = u - iv$). Nach Satz 5.9 existiert ein $t \in [0, \pi]$ mit $u = \cos t$. Dann ist $\sin t \geq 0$ und

$$v^2 = 1 - u^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t.$$

Also gilt $v = \sin t$ und damit $e^{it} = \cos t + i \sin t = w$.

2. Es sei $w \in \mathbb{C}$. Nach Bemerkung 2.18 existieren $r > 0$, $\zeta \in \mathbb{S}$ mit $w = r\zeta$. Nach Satz 4.19 ist $r = e^s$ für ein $s \in \mathbb{R}$ und nach 1. ist $\zeta = e^{it}$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Damit ist $w = e^s e^{it} = e^{s+it}$. \square

Bemerkung und Definition 5.15 Wie bereits angedeutet, sind im Körper \mathbb{C} Gleichungen der Form $z^n = c$ stets, also für alle $c \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, lösbar. Einen Beweis haben wir bisher noch nicht erbracht. Mithilfe von Satz 5.14 ergibt sich die Behauptung sehr einfach: Ohne Einschränkung sei $c \neq 0$. Dann ist $c = e^w$ für ein $w \in \mathbb{C}$. Für $z := e^{w/n}$ ergibt sich

$$z^n = (e^{w/n})^n = c.$$

Aufgrund der $2\pi i$ -Periodizität von \exp ist dann auch $(ze^{2k\pi i/n})^n = c$ für $k \in \mathbb{Z}$, wobei die n Zahlen

$$z_k := ze^{2k\pi i/n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

paarweise verschieden sind und damit alle Lösungen der Gleichung darstellen. Man nennt z_0, \dots, z_{n-1} die n -ten **Wurzeln** aus c . Im Fall $c = 1$ spricht man auch von den n -ten **Einheitswurzeln**. So sind etwa ± 1 die zweiten Einheitswurzeln und $\pm i, \pm 1$

die vierten Einheitswurzeln. Allgemein sind die n -ten Einheitswurzeln gegeben durch $z_k = e^{2\pi ik/n}$ für $k = 0, \dots, n - 1$. Abbildung 12 zeigt die zehnten Einheitswurzeln.³⁶

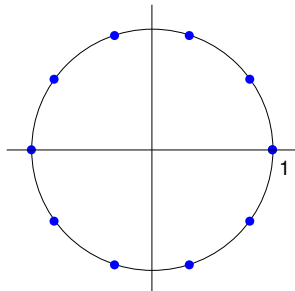


Abbildung 12: Zehnte Einheitswurzeln.

Bemerkung und Definition 5.16 (Polarkoordinaten) Aus Satz 5.14 ergibt sich eine weitere Möglichkeit der Darstellung komplexer Zahlen, die sich für viele Zwecke als angemessen erweist. Ist $z \in \mathbb{C}^*$ mit der Polarform $z = r\zeta$, so existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\zeta = e^{i\theta}$, also

$$z = re^{i\theta}.$$

Fixiert man $\alpha \in \mathbb{R}$ und beschränkt man θ auf das Intervall $(\alpha - \pi, \alpha + \pi]$, so ist die Darstellung nach Satz 5.11 eindeutig. Ist $z = (s, t) \in \mathbb{R}^2$, so ist damit auch

$$(s, t) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Man nennt dann $r > 0$ und $\theta \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi]$ die **Polarkoordinaten** von (s, t) bezüglich α . Meist wählt man $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Unter Verwendung von Polarkoordinaten wird die Multiplikation komplexer Zahlen sehr natürlich: Sind $z = re^{i\theta}$ und $w = \rho e^{i\varphi}$, so ist $zw = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$. Außerdem sind die n -ten Wurzeln aus z gegeben durch $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ für $k = 0, \dots, n - 1$

Wir wollen zum Abschluss dieses Abschnitts den Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Wir nutzen dabei, dass man in gewissen Fällen die Existenz von Maxima oder Minima in nichtkompakten Situationen nachweisen kann:

³⁶Geometrisch interpretiert sind die n -ten Einheitswurzeln die Ecken des dem Einheitskreis eingeschriebenen regulären n -Ecks.

Bemerkung 5.17 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist $X = (a, b)$ ein offenes Intervall und existiert ein $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $f(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow a^+$ und $x \rightarrow b^-$, so wird f maximal *oder* minimal. Dies gilt auch, falls $X = \mathbb{C}$ ist und $f(z) \rightarrow c$ für $z \rightarrow \omega$ erfüllt ist.³⁷

Denn: Ohne Einschränkung sei f nicht konstant. Dann existiert ein $u \in X$ mit $f(u) \neq c$. Ist $f(u) > c$, so existiert im ersten Fall ein kompaktes Intervall $K \subset (a, b)$ und im zweiten Fall eine Kreisscheibe $K = B_R(0)$ mit $f(u) > f(x)$ für $x \in X \setminus K$. Nach Satz 3.35 wird f maximal auf K . Ist $x_0 \in K$ so, dass $f(x_0) \geq f(x)$ für $x \in K$, so ist wegen $u \in K$ auch $f(x_0) \geq f(u) \geq f(x)$ für $x \in X \setminus K$. Damit wird f maximal auf X . Ist $f(u) < c$, so wird entsprechend f minimal auf X .

In Bemerkung 5.15 haben wir die Existenz komplexer Wurzeln nachgewiesen. Die Existenz von Wurzeln bedeutet, dass für $d \in \mathbb{N}$ Polynome $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form $p(z) = z^d - c$ stets Nullstellen besitzen. Wir zeigen nun ganz allgemein:

Satz 5.18 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nichtkonstante Polynom $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.

Beweis. Nach Beispiel 3.12 gilt $|p(z)| \rightarrow +\infty$ für $|z| \rightarrow \infty$ und nach der umgekehrten Dreiecksungleichung ist mit p auch $|p|$ stetig. Also existiert nach Bemerkung 5.17 ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|p(z_0)| \leq |p|$. Angenommen, p hat keine Nullstelle. Dann ist insbesondere $p(z_0) \neq 0$. Wir können ohne Einschränkung $z_0 = 0$ und $p(z_0) = 1$ annehmen (sonst betrachte man $p(z + z_0)/p(z_0)$). Dann existieren ein $m \in \{1, \dots, \deg(p)\}$, ein $c_m \neq 0$ und ein Polynom q mit $q(0) = 0$ und

$$p(z) = 1 + c_m z^m + z^m q(z).$$

Nach Bemerkung 5.15 existiert eine m -te Wurzel ζ aus $-|c_m|/c_m$. Damit ist

$$1 + c_m (r\zeta)^m = 1 - r^m |c_m|$$

für $r > 0$. Wählt man $r > 0$ so, dass $r^m \leq |c_m|$ und $|\zeta^m q(r\zeta)| < |c_m|$, so folgt

$$|p(r\zeta)| < 1 - r^m |c_m| + r^m |c_m| = 1,$$

³⁷Für $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir $f(x) \rightarrow +\infty$ ($|x| \rightarrow \infty$), falls $f(1/u) \rightarrow +\infty$ für $u \rightarrow 0$.

im Widerspruch zu $|p| \geq 1$. □

Bemerkung 5.19 Eine äquivalente Formulierung des Fundamentalsatzes ist, dass für jedes nichtkonstante Polynom p und jedes $c \in \mathbb{C}$ die Gleichung $p(z) = c$ in \mathbb{C} lösbar ist³⁸. Mithilfe von Polynomdivision ergibt sich zudem induktiv aus dem Fundamentalsatz ([Ü]): Jedes Polynom p von Grad $d \geq 1$ zerfällt in Linearfaktoren, d. h. es existieren $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = c_d \prod_{k=1}^d (z - z_k) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

³⁸also $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ gilt

A Weiteres zu Mengen und Abbildungen

Definition A.1 Es seien $I \neq \emptyset$ eine Menge, X eine Menge und $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X . Dann heißen

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$$

Vereinigung von (A_α) und

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I\}$$

Durchschnitt von (A_α) . Insbesondere sind damit für eine Menge von Mengen (einem sogenannten Mengensystem) \mathcal{F} auch

$$\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M \quad \text{und} \quad \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M$$

definiert (hier ist speziell $I = \mathcal{F}$ und $A_M = M$). Man schreibt dann auch kurz $\bigcup \mathcal{F}$ beziehungsweise $\bigcap \mathcal{F}$.

Nach Definition sind zwei Mengen gleich, wenn die erste Teilmenge der zweiten und die zweite Teilmenge der ersten ist. Daher beweist man üblicherweise die Gleichheit, indem man die beiden Inklusionen getrennt nachweist. Wir deuten dies im Weiteren durch die Schreibweise \subset : und \supset : in den entsprechenden Beweisen an.

Satz A.2 Es seien X eine Menge, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen in X und $B \subset X$. Dann gilt

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha) \quad \text{und} \quad B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha).$$

und (**De Morgansche Regeln**)

$$B \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha) \quad \text{und} \quad B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha).$$

Beweis. Wir werden exemplarisch die Beweise der links stehenden Aussage führen. Die rechten ergeben sich in ähnlicher Weise. Wir schreiben dabei kurz \bigcup statt $\bigcup_{\alpha \in I}$.

\subset : Es sei $x \in B \cap (\bigcup A_\alpha)$. Dann ist $x \in B$ und $x \in \bigcup A_\alpha$, also $x \in B$ und $x \in A_\beta$ für ein $\beta \in I$. Damit ist $x \in B \cap A_\beta$, also auch $x \in \bigcup (B \cap A_\alpha)$.

\supset : Es sei $x \in \bigcup (B \cap A_\alpha)$. Dann existiert ein $\beta \in I$ mit $x \in B \cap A_\beta$. Damit ist $x \in B$ und $x \in A_\beta$, also auch $x \in B$ und $x \in \bigcup A_\alpha$, das heißt $x \in B \cap (\bigcup A_\alpha)$.

\subset : Es sei $x \in B \setminus (\bigcup A_\alpha)$. Dann ist $x \in B$ und $x \notin \bigcup A_\alpha$, also $x \in B$ und $x \notin A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Damit ist $x \in B \setminus A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, also $x \in \bigcap (B \setminus A_\alpha)$.

\supset : Es sei $x \in \bigcap (B \setminus A_\alpha)$. Dann ist $x \in B \setminus A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, also $x \in B$ und $x \notin A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Damit ist $x \in B$ und $x \notin \bigcup A_\alpha$, das heißt $x \in B \setminus (\bigcup A_\alpha)$. \square

Definition A.3 Sind X, Y Mengen und ist $f : X \rightarrow Y$, so heißt für $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Urbildmenge von B unter f .

Satz A.4 Es seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$.

1. Ist $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen in Y , so gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha) \quad \text{und} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha).$$

2. Ist $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen in X , so gilt

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \quad \text{und} \quad f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

Beweis.

1. Wir beschränken uns wieder auf die links stehende Aussage.

\subset : Es sei $x \in f^{-1}(\bigcup B_\alpha)$. Dann ist $f(x) \in \bigcup B_\alpha$, das heißt, es existiert ein $\beta \in I$ mit $f(x) \in B_\beta$. Also ist $x \in f^{-1}(B_\beta)$ und damit auch $x \in \bigcup f^{-1}(B_\alpha)$.

\supset : Ist $\beta \in I$, so ist $B_\beta \subset \bigcup B_\alpha$, also auch $f^{-1}(B_\beta) \subset f^{-1}(\bigcup B_\alpha)$. Da $\beta \in I$ beliebig war, gilt $\bigcup f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}(\bigcup B_\alpha)$.

2. Zur linken Aussage:

\subset : Es sei $y \in f(\bigcup A_\alpha)$. Dann existiert ein $x \in \bigcup A_\alpha$ mit $f(x) = y$. Ist $\beta \in I$ mit $x \in A_\beta$, so ist also $y = f(x) \in f(A_\beta)$. Damit ist $y \in \bigcup f(A_\alpha)$.

\supset : Ist $\beta \in I$, so ist $A_\beta \subset \bigcup A_\alpha$, also auch $f(A_\beta) \subset f(\bigcup A_\alpha)$. Da $\beta \in I$ beliebig war, gilt \supset .

Zur rechten Aussage: Es sei $y \in f(\bigcap A_\alpha)$. Dann existiert ein $x \in \bigcap A_\alpha$ mit $f(x) = y$. Damit ist $y = f(x) \in f(A_\alpha)$ für jedes $\alpha \in I$, d. h. $y \in \bigcap f(A_\alpha)$. \square

Bemerkung A.5 Man beachte, dass in der letzten Aussage des zweiten Teils von Satz A.4 kein Gleichheitszeichen steht. Ist etwa $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x) := x^2$ für $x \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$f(\{1\} \cap \{-1\}) = f(\emptyset) = \emptyset \quad \text{und} \quad f(\{1\}) \cap f(\{-1\}) = \{1\}.$$

Damit gilt hier keine Gleichheit. Tatsächlich liegt Gleichheit für alle Familien (A_α) genau dann vor, wenn f injektiv ist ([Ü]).

Definition A.6 Es seien A, B beliebige Mengen.

1. A und B heißen **gleichmächtig**, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : A \rightarrow B$ existiert.³⁹
2. Ist A gleichmächtig zu $\{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so sagt man, dass A die **Mächtigkeit** n hat (man kann zeigen, dass n eindeutig ist). Der leeren Menge wird die Mächtigkeit 0 zugeordnet. Wir schreiben dann $\#A := n$. Damit heißt A **endlich**, falls A eine Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}_0$ hat und **unendlich**, falls dies nicht der Fall ist.⁴⁰
3. Eine Menge A heißt **abzählbar**, falls A gleichmächtig zu \mathbb{N} oder endlich ist. Ist A nicht abzählbar, so sagt man A sei überabzählbar.

Beispiel A.7 Man kann zeigen ([Ü]), dass etwa $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig zu \mathbb{N} , also insbesondere abzählbar sind.

Bemerkung und Definition A.8 Es sei X eine Menge. Eine Familie $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Mengen in X heißt **disjunkt**, falls $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ für $\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$ gilt. Ist A eine Menge und ist $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine disjunkte Familie nichtleerer Mengen mit $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, so nennt man $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine **Zerlegung** von A . Ist A endlich und (A_1, \dots, A_n) eine Zerlegung von A , so gilt

$$\#A = \#A_1 + \dots + \#A_n.$$

³⁹d. h. es existiert eine eins-zu-eins Zuordnung zwischen den Elementen aus A und denen aus B .

⁴⁰Ist A unendlich, so schreibt man auch $\#A = \infty$.

B Von den natürlichen zu den reellen Zahlen

In diesem Anhang werden wir auf die axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen eingehen und einen darauf basierenden konstruktiven Zugang über die ganzen und die rationalen Zahlen zu den reellen *skizzieren*.

Die **natürlichen Zahlen** können axiomatisch beschrieben werden als Tripel $(\mathbb{N}, 1, \nu)$ mit den drei Eigenschaften (**Peano-Axiome**):

(N1) \mathbb{N} ist eine Menge mit $1 \in \mathbb{N}$.

(N2) $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine injektive Funktion mit $1 \notin \nu(\mathbb{N})$.⁴¹

(N3) (Prinzip der vollständigen Induktion) Ist $A \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in A$ und $\nu(A) \subset A$, so ist $A = \mathbb{N}$.

Damit definiert man die arabischen Ziffern durch $2 := \nu(1)$, $3 := \nu(2)$, $4 := \nu(3)$, $5 := \nu(4)$, $6 := \nu(5)$, $7 := \nu(6)$, $8 := \nu(7)$ und $9 := \nu(8)$. Weiter kann man – mit viel Aufwand – zeigen:

Auf \mathbb{N} ist durch $n + 1 := \nu(n)$ und $n + \nu(m) := \nu(n + m)$ für $n, m \in \mathbb{N}$ eine assoziative und kommutative Verknüpfung $+$ rekursiv definiert. Unter Verwendung der Addition ist durch $n < m$ falls $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ zudem eine Ordnungsrelation $<$ auf \mathbb{N} gegeben. Damit kann man wiederum zeigen: Auf \mathbb{N} ist durch $n \cdot 1 := 1$ und $n(m + 1) := nm + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$ eine assoziative und kommutative Verknüpfung \cdot rekursiv definiert. So wird $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ zu einem abelschen Monoid.

Erweitert man \mathbb{N} um ein Element 0 zu \mathbb{N}_0 mit $0 < n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und so, dass $n + 0 := 0 + n := n$ und $n \cdot 0 := 0 \cdot n := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist auch $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ ein abelsches Monoid.

Bemerkung B.1 Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die wichtige **Wohlordnungseigenschaft** von \mathbb{N}_0 ([Ü]):

Jede nichtleere Menge $M \subset \mathbb{N}_0$ hat ein minimales Element.

Hiermit kann man leicht zeigen: Zu jedem Paar $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert genau ein Paar $(a, r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $r < p$ und $n = ap + r$ (Division mit Rest).

Ist $A \subset \mathbb{N}_0$, so heißt ein Tupel $(a_j) = (a_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in A^{\mathbb{N}_0}$ eine **abbrechende Folge** in A , falls ein $d \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $a_j = 0$ für $j > d$. Man nennt das kleinste solche d die

⁴¹Die Zahl $\nu(n)$ nennt man Nachfolger von n . (N2) besagt, dass 1 kein Nachfolger eines $n \in \mathbb{N}$ ist.

Länge von (a_j) . Damit gilt folgende wichtige Aussage über die *Darstellung* natürlicher Zahlen:

Satz B.2 *Es seien $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ und $A := \{a \in \mathbb{N}_0 : a \leq q - 1\}$.⁴² Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ genau ein abbrechende Folge $(a_j(n))$ in A mit*

$$n = \sum_{j=0}^{d(n)} a_j(n)q^j,$$

wobei $d(n)$ die Länge von $(a_j(n))$ ist.

Beweis. 1. Eindeutigkeit: Es seien $(b_j), (a_j)$ abbrechende Folgen in A mit

$$n = \sum_{j=0}^m a_j q^j = \sum_{j=0}^m b_j q^j.$$

Angenommen es ist $(a_j) \neq (b_j)$, also $J := \{j : a_j \neq b_j\} \neq \emptyset$ (und endlich). Ohne Einschränkung sei $b_N > a_N$, wobei N das maximale $j \in J$ ist. Es gilt ($[\dot{U}]$)

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j q^j < q^N$$

und damit wegen $a_j = b_j$ für $j > N$ und $a_N + 1 \leq b_N$

$$\sum_{j=0}^m a_j q^j = \sum_{j=0}^{N-1} a_j q^j + a_N q^N + \sum_{j>N} a_j q^j < (a_N + 1)q^N + \sum_{j>N} b_j q^j \leq \sum_{j=0}^m b_j q^j.$$

Widerspruch!

2. Wir zeigen die Existenz per Induktion nach n .

Induktionsanfang $n = 0$: Man setze $a_j(0) := 0$ für $j \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt $r < n \rightarrow n$: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $q^k \leq n < q^{k+1}$. Nach Division mit Rest existieren $0 < a < q$ und $0 \leq r < q^k$ mit

$$n = aq^k + r,$$

⁴² A kann als Menge der Ziffern interpretiert werden, eine Art Alphabet der Zahlen.

also insbesondere $r < n$. Nach Induktionsvoraussetzung (die Behauptung gilt für jedes $r < n$) existiert eine Folge $(a_j(r))$ mit

$$r = \sum_{j=0}^{d(r)} a_j(r)q^j.$$

Wegen $r < q^k$ ist $d(r) < k$. Setzt man $a_j(n) := a_j(r)$ für $j \neq k$ und $a_k(n) := a$, so ist $n = \sum_{j=0}^{d(n)} a_j(n)q^j$ mit $d(n) = k$. \square

Man nennt $(a_{d(n)}(n)a_{d(n)-1}(n) \dots a_0(n))_q$ die **q -adische Darstellung** von n . Im Falle $q = 2$ spricht man dann von der **Binärdarstellung**, im Falle $q = 2 \cdot 5$ von der **Dezimaldarstellung** und im Falle $q = 2^4$ von der **Hexadezimaldarstellung**.⁴³ Schließlich schreibt man im Dezimalfall auch kurz $a_{d(n)}(n) \dots a_0(n)$ statt $(a_{d(n)}(n) \dots a_0(n))_{2.5}$. So ist etwa für $n = 8 + 8 + 7$

$$n = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (10111)_2$$

und

$$n = 2 \cdot (2 \cdot 5)^1 + 3 \cdot (2 \cdot 5)^0 = (23)_{2.5} = 23.$$

Definition B.3 Eine Relation \sim auf X heißt **Äquivalenzrelation**, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

- (A1) $x \sim x$ (Reflexivität),
- (A2) aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (Symmetrie),
- (A3) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (Transitivität).

Ist \sim eine Äquivalenzrelation, so heißt $[x] := [x]_{\sim} := \{x' \in X : x \sim x'\}$ die von x erzeugte **Äquivalenzklasse** und jedes $x' \in [x]$ ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse $[x]$. Außerdem heißt $X/\sim := \{[x] : x \in X\}$ **Quotientenmenge** von X (**modulo** \sim).

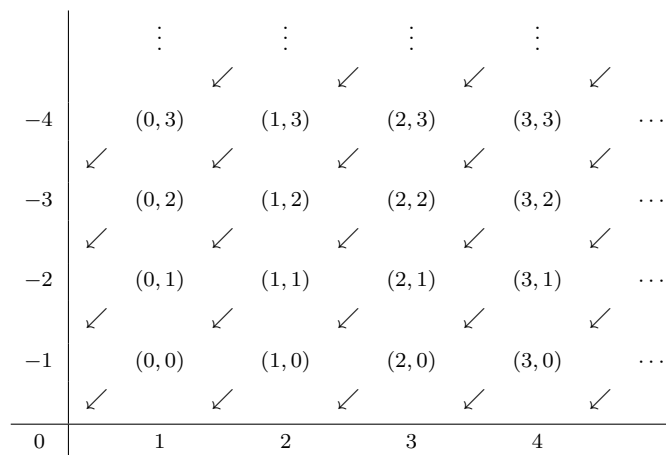
⁴³Die Schreibweise $q = 2 \cdot 5$ beziehungsweise $q = 2^4$ mag umständlich erscheinen, ist aber nicht durch $q = 10$ beziehungsweise $q = 16$ ersetzbar, da dies schon die zu definierende Dezimaldarstellung vorwegnehmen würde.

Bemerkung und Definition B.4 Es sei $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Durch $(a, b) \sim (a', b')$ falls $a + b' = b + a'$ für $a, b, a', b' \in \mathbb{N}_0$ ist \sim eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Ist $a \geq b$, so existiert (genau) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a = b + n$ und es gilt damit

$$[(a, b)] = \{(k + n, k) : k \in \mathbb{N}_0\} = [(n, 0)].$$

Ist $a < b$, so ist $b = a + m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und damit

$$[(a, b)] = \{(k, k + m) : k \in \mathbb{N}_0\} = [(0, m)].$$



Definiert man die Menge \mathbb{Z} der **ganzen Zahlen** als

$$\mathbb{Z} := X/\sim = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\sim,$$

so sind durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)] \quad \text{und} \quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$$

Verknüpfungen $+$ und \cdot auf \mathbb{Z} (unabhängig von der Wahl der jeweiligen Repräsentanten) definiert, mit denen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ zu einem kommutativen Ring wird. Dabei gilt $[(0, n)] = -[(n, 0)]$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Indem man n mit $[(n, 0)]$ identifiziert, ist \mathbb{N}_0 in \mathbb{Z} eingebettet, und es ergibt sich

$$[(a, b)] = [(a, 0)] + [(0, b)] = [(a, 0)] - [(b, 0)] = a - b \quad (a, b \in \mathbb{N}_0).$$

Außerdem ist damit durch $a - b < c - d$ definitionsgemäß genau dann, wenn $a + d < b + c$ für $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ eine Erweiterung der Ordnung $<$ von \mathbb{N}_0 auf \mathbb{Z} definiert.

Bemerkung und Definition B.5 Es sei $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Definiert man $(a, b) \sim (a', b')$ falls $ab' = ba'$ für $(a, b), (a', b') \in X$, so ist \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Man kann zeigen: Für $(a, b) \in X$ existieren teilerfremde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ mit

$$[(a, b)] = \{(mp, mq) : m \in \mathbb{Z}^*\} = [(p, q)].$$

Definiert man die Menge \mathbb{Q} der **rationalen Zahlen** als

$$\mathbb{Q} := X/\sim = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$$

und Verknüpfungen $+$ und \cdot durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + cb, bd)] \quad \text{und} \quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)],$$

so wird $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ zu einem Körper. Dabei gilt $1/[(a, b)] = [(b, a)]$ für $a \neq 0$. Durch Identifikation von a und $[(a, 1)]$ ist wieder \mathbb{Z} in \mathbb{Q} eingebettet und es gilt

$$[(a, b)] = [(a, 1)] \cdot [(1, b)] = \frac{[(a, 1)]}{[(b, 1)]} = \frac{a}{b} \quad ((a, b) \in X).$$

Schließlich erweitert die Definition $a/b < c/d$ falls $ad < bc$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}$ (also $b, d > 0$) die Ordnung $<$ von \mathbb{Z} auf \mathbb{Q} .

Wir skizzieren zum Abschluss einen möglichen konstruktiven Zugang zu den reellen Zahlen, der an die q -adische Darstellung natürlicher Zahlen anschließt. Basis ist die folgende Beobachtung ([Ü]): Sind $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq k$, so gilt

$$\sum_{j=k}^{n-1} a_j q^j \leq q^n - q^k \tag{B.1}$$

für beliebige $a_j \in \{0, \dots, q-1\}$. Insbesondere ist für $k < 0$ mit $m := -k$

$$\frac{a_{-1}}{q} + \frac{a_{-2}}{q^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{q^m} = \sum_{j=-m}^{-1} a_j q^j \leq 1 - \frac{1}{q^m} < 1.$$

Bemerkung und Definition B.6 Es seien $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$ und $A := \{0, 1, \dots, q-1\}$. Wir betrachten die Menge der nach oben abbrechenden zweiseitigen Folgen

$$A^{\mathbb{Z}} := \{(a_j) = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}} : \text{es existiert ein } d \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } a_j = 0 \text{ falls } j > d\}.$$

Man schreibt statt $(a_j) \in A^{\mathbb{Z}}$ komprimierter und suggestiver

$$(a_d a_{d-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots)_q = a_d a_{d-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$$

und spricht von einer q -adischen Folge. Im Fall $q = 2$ spricht man von **Binärfolge** und im Fall $q = 2 \cdot 5$ von **Dezimalfolge**. Wir setzen

$$A^{(\mathbb{Z})} := \{(a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}} : \text{es existiert ein } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } a_j = 0 \text{ falls } j < -m\}$$

und nennen (a_j) **abbrechend**, falls $(a_j) \in A^{(\mathbb{Z})}$ gilt. Aus (B.1) sieht man wie beim Beweis der Eindeutigkeit in Satz B.2, dass die Abbildung

$$A^{(\mathbb{Z})} \ni (a_j) \mapsto \sum_{j=-m}^d a_j q^j \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$$

injektiv ist. Wir identifizieren im Weiteren die abbrechende Folge (a_j) mit der entsprechenden rationalen Zahl. Weiter definiert man auf $A^{(\mathbb{Z})}$ eine Äquivalenzrelation durch $(a_j) \sim (b_j)$ genau dann, wenn $(a_j) = (b_j)$ oder wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ so existiert, dass $a_j = b_j$ für $j > k$, $a_k = b_k + 1$ sowie $a_j = 0$ und $b_j = q - 1$ für $j < k$ (oder entsprechend mit vertauschten Rollen von a_j und b_j). Damit sind alle Äquivalenzklassen entweder ein- oder zweielementig, wobei im zweielementigen Fall eine der beiden Folgen abbrechend ist.

Bemerkung B.7 Wir betrachten ab jetzt den Fall $q = 2$ und definieren

$$X := \{x = [(a_j)] : (a_j) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}\}.$$

Wählt man im Fall zweielementiger $[(a_j)]$ die abbrechende Folge als Repräsentant, so entspricht jedem $x \in X$ genau eine Binärfolge (a_j) . Wenn nichts anderes gesagt ist, legen wir uns auf diese Darstellung fest und schreiben dann auch $x = (a_j)$. Ist $x = (a_j)$ (in diesem Sinne), so nennen wir für $k \in \mathbb{Z}$ ⁴⁴

$$[x]_k := \sum_{j \geq k} a_j 2^j \in 2^k \mathbb{N}_0$$

die k -te Abschneidung von x . Unter Verwendung der Relation $<$ auf $\mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ definieren wir eine Relation $<$ auf X durch $x < y$ genau dann, wenn $[x]_k < [y]_k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$

⁴⁴Ist \cdot eine Verknüpfung auf einer Menge M , so schreiben wir für $B \subset M$ und $a \in M$ kurz $aB := \{ab : b \in B\}$.

gilt. Ist dies der Fall, so folgt $\lfloor x \rfloor_n < \lfloor y \rfloor_n$ für alle $n \leq k$ aus (B.1). und damit sieht man, dass $(X, <)$ geordnet ist. Wesentlich ist nun, dass $(X, <)$ *vollständig* ist.

Wir deuten den Beweis der Vollständigkeit an. Es sei dazu $M \subset X$ nichtleer und nach oben beschränkt und ohne Einschränkung $M \neq \{0\}$. Wir definieren rekursiv eine Binärfolge (b_j) : Zunächst folgt aus der Beschränktheit nach oben von M die Beschränktheit nach oben von

$$\{k \in \mathbb{Z} : \lfloor x \rfloor_k \neq 0 \text{ für ein } x \in M\}$$

in \mathbb{Z} . Ist d das Maximum dieser Menge, so setzen wir $b_d := 1$ und $b_j := 0$ für $j > d$. Weiter definieren wir

$$b_{d-1} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor_{d-1} > 2^d \text{ für ein } x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und entsprechend für $n \in \mathbb{N}$

$$b_{d-n-1} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor_{d-n-1} > 2^d + b_{d-1}2^{d-1} + \dots + b_{d-n}2^{d-n} \text{ für ein } x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $s := [(b_j)]$, so ergibt sich $s = \sup M$ aus der Konstruktion von s .

Bemerkung B.8 Nun wollen wir in X rechnen. Zunächst setzt man $0 := [(0)_{j \in \mathbb{Z}}]$ und $1 := [(\delta_{j,0})_{j \in \mathbb{Z}}]$. Die Existenz von Suprema ermöglicht es, die Verknüpfungen $+$ und \cdot von $A^{(\mathbb{Z})}$ auf X zu erweitern: Für $x, y \in X$ existieren nämlich

$$x + y := \sup \{ \lfloor x \rfloor_k + \lfloor y \rfloor_k : k \in \mathbb{Z} \} \in X$$

und

$$x \cdot y := \sup \{ \lfloor x \rfloor_k \cdot \lfloor y \rfloor_k : k \in \mathbb{Z} \} \in X.$$

Die Kommutativität ist klar. Das Hauptproblem besteht darin, zu zeigen, dass $+$ assoziativ ist und dass $(X \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine Gruppe ist. Ist dies getan, so sieht man wie bei der Erweiterung von \mathbb{N}_0 zu \mathbb{Z} , dass durch $(a, b) \sim (a', b')$ falls $a + b' = b + a'$ für $(a, b), (a', b') \in X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf $X \times X$ definiert ist. Damit setzt man

$$\mathbb{R} := (X \times X) / \sim$$

und schreibt wieder $a - b$ statt $[(a, b)]$ und im Falle $b = 0$ kurz a sowie im Falle $a = 0$ kurz $-b$. Die Rechenoperationen $+$ und \cdot sowie die Relation $<$ übertragen sich wie im Fall der ganzen Zahlen auf \mathbb{R} , und zwar so, dass damit $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ ein vollständig geordneter Körper wird.⁴⁵ Dabei ist \mathbb{Q} monoton eingebettet in \mathbb{R} , das heißt, es existiert eine injektive Abbildung $j : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $j(x+y) = j(x)+j(y)$ und $j(xy) = j(x)j(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt und dass $j(x) < j(y)$ genau dann gilt, wenn $x < y$ ist. Indem man $j(x)$ mit x identifiziert, kann man \mathbb{Q} als Teilmenge von \mathbb{R} auffassen. Man kann zeigen, dass in diesem Sinne den rationalen Zahlen die sogenannten periodischen Binärfolgen entsprechen.

Bemerkung B.9 Man kann zeigen, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist ([Ü]; Stichwort: zweites Cantorsches Diagonalverfahren).

⁴⁵In der Literatur findet man neben axiomatischen Zugängen oft den konstruktiven Zugang über *Dedekindsche Schnitte*. Der Vorteil dieses Zugangs liegt in einer einfacheren Definition des Supremums und einem weniger aufwändigen Nachweis der Körperaxiome, allerdings sind die dabei betrachteten Objekte, die am Ende als reelle Zahlen bezeichnet werden, weniger instruktiv als die oben eingeführten Binärfolgen. Außerdem knüpft die Vorstellung einer reellen Zahl als Binärfolge meist an die Vorkenntnisse aus der Schule an und deutet zudem Problematiken der Gleitkommaarithmetik und der Struktur der Maschinenzahlen an.

C Metrische Räume

Für die Analysis ist das Konzept der Grenzwerte von zentraler Bedeutung. Dabei ist es wesentlich, von Abständen zwischen zwei Elementen in einer Menge sprechen zu können. Wir betrachten nun ganz allgemein Mengen, in denen ein Abstand zwischen jeweils zwei Elementen definiert ist.

Definition C.1 Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik** (oder **Abstand**) auf X , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (D1) (Definitheit) Für $x, y \in X$ ist $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) > 0$, falls $x \neq y$.
- (D2) (Symmetrie) Für $x, y \in X$ ist $d(x, y) = d(y, x)$.
- (D3) (Dreiecksungleichung) Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Das Paar (X, d) heißt dann **metrischer Raum**. Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $M \subset X$ nichtleer, so ist durch $d_M := d|_{M \times M}$ eine Metrik auf M gegeben. Man nennt d_M die **Spurmetrik** von d auf M .

Bemerkung und Definition C.2 1. Auf \mathbb{K} ist durch

$$d(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{K})$$

eine Metrik gegeben (die Dreiecksungleichung aus Satz 2.17 impliziert die Dreiecksungleichung für d). Man spricht von der **Betragsmetrik**. Entsprechend ist im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mit der Länge

$$\|(z, u)\| := \sqrt{|z|^2 + u^2} = \sqrt{s^2 + t^2 + u^2} \quad (z = (s, t) \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{R})$$

durch

$$d((z, u), (w, v)) := \|(z, u) - (w, v)\| \quad ((z, u), (w, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R})$$

eine Metrik definiert ([Ü]).

2. Ist $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, so definiert

$$\delta(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X , die sogenannte **diskrete Metrik**. Insbesondere kann also jede nichtleere Menge mit einer Metrik versehen werden.

Bemerkung und Definition C.3 Wir ergänzen die komplexe Ebene durch einen Punkt, den wir ω nennen, und setzen

$$\mathbb{C}_\omega := \mathbb{C} \cup \{\omega\}.$$

Wir wollen \mathbb{C}_ω mit einer Metrik versehen. Dazu sei $\|\cdot\|$ die euklidische Länge im Raum $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ und mit $0 = 0_{\mathbb{C}}$

$$S := \{(w, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \|(w, u) - (0, 1/2)\| = 1/2\}$$

die 2-Sphäre mit Mittelpunkt $(0, 1/2)$ und Radius $1/2$. Dann ist durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{1 + |z|^2}(z, |z|^2) \quad (z \in \mathbb{C})$$

eine Abbildung von \mathbb{C} auf $S \setminus \{(0, 1)\}$ definiert ([Ü]).⁴⁶ Mit $\varphi(\omega) := (0, 1)$ ist also $\varphi : \mathbb{C}_\omega \rightarrow S$ surjektiv.

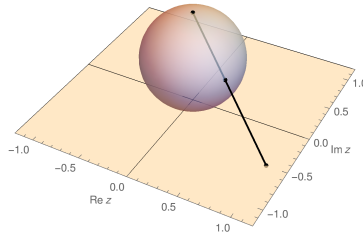


Abbildung 13: stereographische Projektion.

Man kann nachrechnen, dass für $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}_\omega$

$$\|\varphi(z) - \varphi(z')\| = \begin{cases} |z - z'| / \sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}, & \text{falls } z' \in \mathbb{C} \\ 1 / \sqrt{1 + |z|^2}, & \text{falls } z' = \omega \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

gilt ([Ü]). Insbesondere ist damit φ bijektiv und durch $\chi(z, z') := \|\varphi(z) - \varphi(z')\|$ eine Metrik auf \mathbb{C}_ω definiert, genannt die **chordale Metrik**. Die Umkehrabbildung φ^{-1} von φ heißt **stereographische Projektion** und ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(w, u) = \begin{cases} w/(1 - u), & \text{falls } u \neq 1 \\ \omega, & \text{falls } u = 1 \end{cases}.$$

⁴⁶Geometrisch ergibt sich der Punkt $\varphi(z)$ als der Schnittpunkt der Sphäre S mit der Strecke zwischen den Punkten $(0, 1)$, also dem Nordpol der Sphäre, und dem Punkt $(z, 0)$.

Definition C.4 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Für $a \in X$ und $0 < \rho \leq +\infty$ setzen wir

$$U_\rho(a) := U_{\rho,d}(a) := U_{\rho,X}(a) := \{x \in X : d(x, a) < \rho\}.$$

Man spricht dann von der (offenen) ρ -**Umgebung** von a . Weiter setzen wir

$$\dot{U}_\rho(a) := \dot{U}_{\rho,d}(a) := \{x \in X : 0 < d(x, a) < \rho\}.$$

Damit heißt a ein **Häufungspunkt** von M , falls $M \cap \dot{U}_\rho(a) \neq \emptyset$ für alle $\rho > 0$ ist. Wir schreiben M' für die Menge der Häufungspunkte von M in X .

2. Sind $a \in X$ und $M \subset X$, so heißt a ein **innerer Punkt** von M (im metrischen Raum (X, d)), falls ein $\rho > 0$ existiert mit $U_\rho(a) \subset M$. In diesem Fall heißt zudem M eine **Umgebung** von a (im Raum (X, d)). Die Menge M heißt **offen**, falls jeder Punkt von M innerer Punkt ist, und abgeschlossen, falls $X \setminus M$ offen ist. Mit der Dreiecksungleichung sieht man, dass $U_\rho(a)$ offen ist ([Ü]).

Satz C.5 Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$, so ist M genau dann abgeschlossen, wenn $M' \subset M$ gilt.

Beweis. Ist M abgeschlossen, also $M^c = X \setminus M$ offen, $a \in M'$ und $\delta > 0$, so ist $(U_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap M \neq \emptyset$. Damit ist a kein innerer Punkt von M^c , also $a \notin M^c$.

Ist umgekehrt $M' \subset M$ und $x \in M^c$, so ist $x \notin M'$, also $U_\delta(x) \cap M = \emptyset$ für ein $\delta > 0$. Damit ist x innerer Punkt von M^c . \square

Bemerkung C.6 Man sieht leicht, dass beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen offen sind, und dass beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind ([Ü]).

Bemerkung und Definition C.7 Es seien (X, d_X) und (Y, d) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Ist $a \in X$, so heißt f **stetig** an der Stelle $a \in X$, falls zu jeder offenen Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a existiert mit $f(U) \subset V$.⁴⁷ Weiterhin heißt f stetig auf $M \subset X$, falls f stetig in jedem Punkt $a \in M$ ist und kurz stetig, falls f stetig auf X ist.

⁴⁷Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle $x \in U_{\delta,X}(a)$.

Satz C.8 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Ist $f : X \rightarrow Y$, so ist f genau dann stetig, wenn für alle offenen Mengen $V \subset Y$ die Urbildmenge $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist.⁴⁸*

Beweis. \Rightarrow : Es sei $V \subset Y$ offen. Ist $a \in f^{-1}(V)$, so ist V eine offene Umgebung von $f(a)$. Da f stetig an a ist, existiert eine Umgebung U von a mit $f(U) \subset V$, also $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$. Damit ist $f^{-1}(V)$ offen.

\Leftarrow : Es seien $a \in X$ und V eine offene Umgebung von $f(a)$. Nach Voraussetzung ist $U := f^{-1}(V)$ offen in X . Da $a \in U$ gilt, ist U eine Umgebung von a mit $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$. Also ist f stetig an a . \square

Wir untersuchen nun Folgen in metrischen Räumen.

Bemerkung und Definition C.9 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt **d -konvergent** oder kurz **konvergent**, falls die Metrik aus dem Kontext heraus klar ist, falls ein $c \in X$ so existiert, dass $(d(x_n, c))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge (in \mathbb{R}) ist. Mit der Dreiecksungleichung und (D1) sieht man, dass c eindeutig bestimmt ist. Wir nennen c den **d -Grenzwert** oder kurz **Grenzwert** und schreiben dann $x_n \rightarrow c$ für $n \rightarrow \infty$ (in (X, d)) oder auch

$$\lim x_n := \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n := c.$$

Bemerkung C.10 Man sieht mit (C.1) leicht: Ist (z_n) eine Folge in $(\mathbb{C}_\omega, \chi)$, so gilt $z_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$ in $(\mathbb{C}_\omega, \chi)$ genau dann, wenn $z_n \rightarrow a$ in \mathbb{C} mit der Betragsmetrik, und $z_n \rightarrow \omega$ genau dann, wenn $|z_n| \rightarrow +\infty$ gilt. Insbesondere ist die Folge (n) in $(\mathbb{C}_\omega, \chi)$ konvergent mit $\lim n = \omega$.

Bemerkung und Definition C.11 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , so heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine **Cauchyfolge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert mit

$$d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon \quad (n, n' > R).$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

⁴⁸Durch Komplementbildung sieht man, dass dies auch äquivalent dazu ist, dass Urbilder abgeschlossener Mengen stets abgeschlossen sind.

Bemerkung C.12 Ist $X = (0, \infty)$ mit der Betragsmetrik, so ist die Folge $(1/n)$ eine Cauchyfolge in X , aber nicht konvergent in X . Im Allgemeinen sind also in metrischen Räumen nicht alle Cauchyfolgen konvergent!

Bemerkung und Definition C.13 Ein metrischer Raum (X, d) heißt **folgenkompakt** oder kurz **kompakt**, falls jede Folge eine konvergente Teilfolge hat. Weiter heißt (X, d) **folgenreivollständig** oder kurz **vollständig**, falls jede Cauchyfolge konvergent ist.

Ist (x_n) eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge hat, so ist (x_n) konvergent.

Denn: Es sei $(x_n)_{n \in J}$ eine Teilfolge mit $x_n \rightarrow c$ für $n \in J$ und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $R > 0$ mit $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon/2$ für $n, n' > R$. Weiter existiert ein $j \in J$ so, dass $j > R$ und $d(x_j, c) < \varepsilon/2$. Damit ist $d(x_n, c) \leq d(x_n, x_j) + d(x_j, c) < \varepsilon$ für $n > R$. Also gilt $x_n \rightarrow c$.

Damit ist jeder kompakte Raum vollständig.

Bemerkung C.14 1. In \mathbb{K} ist jede Cauchyfolge beschränkt.

Denn: Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $n_0 \in N$ so, dass $|x_n - x_{n'}| < 1$ für alle $n, n' \in N$ mit $n, n' \geq n_0$, also auch $|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < |x_{n_0}| + 1$ für alle $n \in N$ mit $n \geq n_0$. Da $\{n \in N : n < n_0\}$ endlich ist, ist (x_n) beschränkt.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass ist \mathbb{K} mit der Betragsmetrik ein vollständiger metrischer Raum.⁴⁹

2. Ist $X \subset \mathbb{K}$, so ist X mit der Betragsmetrik nach dem Satz von Heine-Borel genau dann ein kompakter Raum, wenn X beschränkt und abgeschlossen ist. Aus Bemerkung C.10 ergibt sich damit auch, dass (\mathbb{C}, χ) ein kompakter Raum ist.⁵⁰

Satz C.15 *Es seien (X, d_X) ein kompakter Raum und (Y, d) ein metrischer. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(X)$ mit der Spurmetrik von d kompakt.*

⁴⁹Die Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen impliziert über den Satz von Bolzano-Weierstrass die Folgenreivollständigkeit von \mathbb{K} .

⁵⁰Man spricht auch von einer Einpunkt-Kompaktifizierung von \mathbb{C} .

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $f(X)$. Wir wählen $x_n \in X$ mit $y_n = f(x_n)$. Da X kompakt ist, existieren ein $a \in X$ und eine Teilfolge $(x_n)_{n \in I}$ von (x_n) mit $x_n \rightarrow a$ für $n \in I$. Da f stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \rightarrow f(a) \in f(X)$ für $n \in I$. \square

Bemerkung und Definition C.16 Eine stetige, bijektive Funktion zwischen metrischen Räumen, für die f^{-1} ebenfalls stetig ist, nennt man einen **Homöomorphismus**. Aus C.8 folgt, dass f^{-1} genau dann stetig ist, wenn $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ für alle offenen $U \subset X$ offen ist. Durch Komplementbildung sieht man, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ für alle abgeschlossenen $A \subset X$ abgeschlossen ist.

Beispiel C.17 Es sei $X = (-2, 2]$ mit der Betragsmetrik. Wir betrachten die Funktion $f : (-2, 2] \rightarrow \mathbb{S}$ mit

$$f(t) := (1 - |t|) + i\sqrt{|t|(2 - |t|)} \quad (-2 < t \leq 2).$$

Die Funktion ist stetig und bijektiv mit $f(2) = -1 = \lim_{t \rightarrow -2} f(t)$. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist nicht stetig, da etwa $(-2, 0]$ abgeschlossen in X ist, aber das Bild $f(-2, 0] = (\mathbb{S} \cap \{z : \operatorname{Re}(z) < 0\}) \cup \{1\}$ nicht in \mathbb{S} .

Satz C.18 *Es seien (X, d_X) ein kompakter Raum und (Y, d) ein metrischer. Ist $f : X \rightarrow Y$ bijektiv und stetig, so ist (Y, d) kompakt und f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Zunächst ist $Y = f(X)$ nach Satz C.15 kompakt. Es sei $A \subset X$ abgeschlossen. Da A abgeschlossen im kompakten Raum (X, d_X) ist, ist A mit der Spurmetrik ein kompakter Raum. Nach Satz C.15 ist $f(A)$ mit der Spurmetrik von d kompakt. Dann ist insbesondere $f(A)$ abgeschlossen in Y . \square

Index

- Abbildung, 4
 - auf, 5
 - identische, 5
- abbrechend, 67
- abbrechende Folge, 62
- abelsch, 7
- abgeschlossen, 34
- abklingend, 27
- absolut konvergent, 43
- absorbierend, 12
- Abstand, 70
- abzählbar, 61
- Additionstheoreme, 50
- Äquivalenzklasse, 64
- Äquivalenzrelation, 64
- Arkuskosinus, 53
- Arkuskotangens, 53
- Arkussinus, 53
- Arkustangens, 53
- assoziativ, 7

- bedingt konvergent, 43
- beschränkt, 20, 26
- Betrag, 24
- Betragsmetrik, 70
- bijektiv, 5
- Bild, 5
- Binärdarstellung, 64
- Binärfolge, 67
- Binärkörper, 16
- Binomialkoeffizienten, 13
- binomischer Satz, 15

- Cauchyfolge, 73

- chordale Metrik, 71

- De Morgansche Regeln, 59
- Definitionsbereich, 4
- Dezimaldarstellung, 64
- Dezimalfolge, 67
- Differenz, 4
- disjunkt, 61
- diskrete Metrik, 70
- Diskriminante, 19
- distributiv, 11
- Distributivgesetze, 12
- divergent, 28
- Dreiecksungleichung, 24
- Durchschnitt, 59

- Einheitskreis, 25
- Einheitswurzeln, 55
- Eins, 11
- Einschränkung, 5
- Einselement, 11
- Element, 3
 - inverses, 8
 - linksinverses, 8
 - negatives, 17
 - neutrales, 7
 - positives, 17
 - rechtsinverses, 8
- endlich, 61
- Eulersche Formel, 49
- Eulersche Zahl, 33
- Exponentialfunktion, 46

- Führungsterm, 30

- Fakultät, 14
- Familie, 5
- Folge, 5
 - divergente, 28
 - geometrische, 28
- Folglied, 5
- folgenkompakt, 74
- folgenvollständig, 74
- Funktion, 4
 - abklingende, 27
 - beschränkte, 26
 - fallende, 31
 - konvergente, 27
 - monotone, 31
 - periodische, 52
 - rationale, 30
 - stetige, 35
 - streng fallende, 31
 - streng wachsende, 31
 - wachsende, 31
- geometrische Folge, 28
- geometrische Reihe, 40
- geometrische Summenformel, 13
- geordnete Menge, 17
- geordneter Ring, 17
- gleich, 4, 6
- gleichmächtig, 61
- gleichmäßig stetig, 38
- größte untere Schranke, 20
- Grad, 30
- Graph, 17
- Grenzwert, 27, 73
- Gruppe, 8
 - symmetrische, 9
- Häufungspunkt, 26, 72
- Halbgruppe, 7
 - abelsche, 7
 - kommutative, 7
- harmonische Reihe, 42
- Hexadezimaldarstellung, 64
- Hintereinanderausführung, 6
- Homöomorphismus, 75
- identische Abbildung, 5
- imaginäre Einheit, 23
- Imaginärteil, 23
- Indexmenge, 5
- Induktion, 10
- Infimum, 20
- injektiv, 5
- innerer Punkt, 72
- Intervall, 21
- invers, 8
- invertierbar, 8
- isolierter Punkt, 26
- Körper, 16
 - vollständig geordneter, 20
- kartesische Form, 23
- kartesisches Produkt, 7
- kleinste obere Schranke, 19
- Koeffizienten, 30
- kommutativ, 7, 11
- kompakt, 34, 74
- Komplement, 4
- komplexe Zahlen, 23
- Komposition, 6
- konjugiert komplex, 23
- konvergent, 27, 73
- Konvergenz

- absolute, 43
- bedingte, 43
- Kosinusfunktion, 49
- Kotangensfunktion, 54
- Kreiszahl, 51
- leere Menge, 3
- Leibniz-Kriterium, 43
- linksinvers, 8
- Logarithmusfunktion, 48
- Mächtigkeit, 61
- Majorante, 44
- Majorantenkriterium, 44
- maximal, 37
- maximal auf, 38
- Maximum, 19, 37
- Menge, 3
 - beschränkte, 20
 - endliche, 61
 - geordnete, 17
 - leere, 3
 - nach oben beschränkte, 19
 - nach unten beschränkte, 19
- Metrik, 70
 - diskrete, 70
- metrischer Raum, 70
 - vollständiger, 74
- minimal, 38
- minimal auf, 38
- Minimum, 19, 38
- modulo, 64
- Monoid, 7
- monoton, 31
- nach oben beschränkt, 19
- nach unten beschränkt, 19
- natürliche Zahlen, 62
- negativ, 17
- neutral, 7
- Normalform, 23
- Null, 11
- Nullelement, 11
- Nullfolge, 28
- nullteilerfrei, 16
- obere Schranke, 19
- Obermenge, 4
- offen, 72
- Ordnung, 17
- ordnungsvollständig, 20
- Partialsommen, 40
- Pascalsches Dreieck, 14
- Peano-Axiome, 62
- Periode, 52
- periodisch, 52
- Permutation, 9
- Polarform, 25
- Polarkoordinaten, 56
- Polynom, 30
- Polynomfunktion, 30
- positiv, 17
- Potenzmenge, 8
- Punkt
 - innerer, 72
 - isolierter, 26
- q -adische Darstellung, 64
- Quotientenkriterium, 45
- Quotientenmenge, 64
- Realteil, 23
- rechtsinvers, 8

- reelle Zahlen, 20
- Reihe, 40
 - absolut konvergente, 43
 - bedingt konvergente, 43
 - harmonische, 42
- Reihenglieder, 40
- Reihenwert, 40
- rekursiv, 9
- Relation, 17
- Repräsentant, 64
- ρ -Umgebung, 27, 72
- Ring, 11
 - geordneter, 17
 - kommutativer, 11
- Schnitt, 4
- Schranke
 - größte untere, 20
 - kleinste obere, 19
 - obere, 19
 - untere, 19
- Sinusfunktion, 49
- Spurmetrik, 70
- stereographische Projektion, 71
- stetig, 35, 72
- streng fallend, 31
- streng wachsend, 31
- Supremum, 19
- surjektiv, 5
- symmetrische Gruppe, 9
- Tangensfunktion, 54
- Teilfolge, 33
- Teilmenge, 4
- Teilsommen, 40
- Umgebung, 72
- Umkehrfunktion, 7
 - unendlich, 61
 - untere Schranke, 19
- Urbildmenge, 60
- Vereinigung, 4, 59
- Verkettung, 6
- Verknüpfung, 7
 - assoziative, 7
 - distributive, 11
 - kommutative, 7
- vollständig (geordnet), 20
- vollständig, 20, 74
- vollständige Induktion, 10
- Wertebereich, 5
- Wohlordnungseigenschaft, 62
- Wurzelkriterium, 45
- Wurzeln, 55
- Zahl
 - konjugiert komplexe, 23
- Zahlen
 - ganze, 65
 - komplexe, 23
 - natürliche, 62
 - rationale, 66
 - reelle, 20
- Zerlegung, 61
- Zielbereich, 4