H.-D. Keller 21.02.2010

Wahrscheinlichkeitsrechnung I (WS 2009/2010)
Übungsblatt 4
Besprechung: 1. Woche

Aufgabe 16 (Beweis von Satz 2.21)

(a) Seien $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum, $n \in \mathbb{N}$ und $P_1, \ldots, P_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße über $(\Omega, \mathfrak{S})$. Zeigen Sie, dass durch

$$P(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_i(A),\ A \in \mathfrak{S},$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathfrak{S})$ definiert ist.

(b) Seien Ω eine Grundmenge, $n \in N$ und $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$. Zeigen Sie, dass durch

$$P(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_A(\omega_i),\ A \in \mathfrak{P}(\Omega),$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ definiert ist.

(c) Verallgemeinern Sie die in (a) formulierte Aussage.

Aufgabe 17
Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine nicht leere abzählbare Indexmenge und $A, B, A_i \in \mathfrak{S}$, $i \in I$. Zeigen Sie:

(a) Aus $P(A) \geq 0,96$ und $P(B) \geq 0,95$ folgt $P(A \cap B) \geq 0,91$.

(b) Es gilt $\inf\{P(A_i) : i \in I\} \geq P(\bigcap_{i \in I} A_i) \geq 1 - \sum_{i \in I}(1 - P(A_i))$.

(c) Sind alle A_i, $i \in I$, fast sicher, so ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ ebenfalls fast sicher.

Aufgabe 18 (Satz 2.30)
Seien $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\{\omega\} \in \mathfrak{S}$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\Omega_0 = sp_+(P)$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes nicht leere abzählbare Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

(b) Ω_0 ist abzählbar.

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

  (i) Für jedes nicht leere Ereignis $A \in \mathfrak{S}$ gilt $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

  (ii) Ω_0 ist ein Träger von P.

(d) Gilt in (c) eine der beiden äquivalenten Aussagen (i) und (ii), so ist Ω_0 der kleinste Träger von P, d. h. für jeden anderen Träger Ω_* von P folgt $\Omega_0 \subset \Omega_*$.

Aufgabe 19

Seien $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum und $P : \mathfrak{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine nicht negative, normierte, additive Abbildung. Zeigen Sie:

(a) P ist endlich additiv.

(b) P ist endlich subadditiv.

(c) Für jede in $\mathfrak{S}$ liegende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Aufgabe 20

Seien $(\Omega, \mathfrak{S})$ ein Messraum und $P : \mathfrak{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine nicht negative, normierte, additive Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) P ist σ-additiv.

(ii) Für jede in $\mathfrak{S}$ liegende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \uparrow A$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

(iii) Für jede in $\mathfrak{S}$ liegende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \downarrow A$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

(iv) Für jede in $\mathfrak{S}$ liegende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.