Jürgen Müller

Einführung in die Mathematik (plus) und Analysis einer und mehrerer Veränderlicher

Skript zu den Vorlesungen im Wintersemster 2024/25 und Sommersemester 2025

Universität Trier
Fachbereich IV
Mathematik/Analysis

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Abbildungen und Ringe

Mathematik ist einfach – bzw. zweifach. Im Grunde genommen befasst man sich mit lediglich zwei Arten von Objekten, nämlich Mengen und Abbildungen. Unsere Darstellung gründet auf dem von Georg Cantor geprägten (sogenannten naiven) Mengenbegriff:

> Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Ein solches Objekt x heißt **Element** der Menge M (Schreibweise: $x \in M$; ist x nicht Element von M, so schreiben wir $x \notin M$). Die Menge ohne Elemente heißt die **leere Menge** (Schreibweise: $\varnothing$ oder $\{\}$).
Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Mengen, etwa die aufzählende Schreibweise oder auch die beschreibende, also eine Charakterisierung der Elemente. Die beschreibende Variante hat allgemein die Form[1]

$$M := \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\} := \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\},$$

wobei E eine gegebene Eigenschaft ist. Wir stellen uns auf den Standpunkt, dass natürliche, ganze und rationale Zahlen bekannt sind, werden aber in der Plus-Vorlesung auf eine konstruktive Einführung eingehen.[2] Man schreibt

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl}\}, \\ \mathbb{N}_0 &:= \{x : x \text{ natürliche Zahl oder } x = 0\}, \\ \mathbb{Z} &:= \{x : x \text{ ganze Zahl}\}, \\ \mathbb{Q} &:= \{x : x \text{ rationale Zahl}\}. \end{aligned}$$

Definition 1.1 Es seien A, B Mengen.

[1] Das Symbol := nennt man ein definierendes Gleichheitszeichen. Es bedeutet, dass das auf der linken Seite Stehende durch das auf der rechten Stehende bezeichnet wird. Manchmal schreibt man auch =:, wenn das links Stehende bekannt ist.

[2] Das Gleiche werden wir später für reelle Zahlen tun.

1. A heißt **Teilmenge** von B (Schreibweise: $A \subset B$ oder auch $A \subseteq B$), falls aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt. Man nennt dann B auch eine **Obermenge** von A und schreibt dafür $B \supset A$.
2. A und B heißen **gleich** (Schreibweise $A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt. Sind dabei speziell $A := \{x\}$ und $B := \{y\}$ einelementig, so nennen wir x und y **gleich** (Schreibweise: $x = y$; sind x und y ungleich, so schreibt man $x \neq y$).
3. Die Menge

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

heißt **Vereinigung** von A und B und die Menge

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Schnitt von A und B. Weiter nennt man

$$B \setminus A := \{x : x \in B \text{ und } x \notin A\}$$

Differenz von B und A. Ist $A \subset B$, so heißt

$$A^c := C_B(A) := B \setminus A$$

Komplement von A (bezüglich B).

Beispiel 1.2 Sind $A := \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ und $B := \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$, so gilt

$$A \cap B = \{6k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ähnlich wie bei der obigen Einführung von Mengen wollen wir auf eine eher informelle Definition des zweiten grundlegenden Begriffes der Mathematik zurückgreifen:
Es seien X und Y nichtleere Mengen.

> Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ *genau ein* Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Alternativ schreibt man auch f_x.

Dabei heißen X der **Definitionsbereich** und Y der **Zielbereich** von f. Außerdem nennt man

$$W(f) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in X\}$$

den **Wertebereich** von f. Man schreibt $f : X \to Y$ beziehungsweise $(f_x)_{x\in X}$ (oder auch $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$ oder kürzer $x \mapsto f(x)$). Im Fall der Schreibweise $(f_x)_{x\in X}$ spricht man auch von einer **Familie** in Y und nennt dann X die **Indexmenge**. Im Fall $X = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man meist $(f_1, \ldots, f_n)$.[3] Ist $X \subset \mathbb{Z}$, so nennt man $(f_n)_{n\in X}$ auch eine **Folge** in Y. Die f_n heißen dann **Folgenglieder**.
Ist $\varnothing \neq A \subset X$, so heißt die Funktion $f|_A : A \to Y$, definiert durch $f|_A(x) := f(x)$ für alle $x \in A$, die **Einschränkung** von f auf A. Die Menge

$$f(A) := W(f|_A) = \{f(x) : x \in A\}$$

nennt man **Bild** von A unter f. Ergänzend setzt man noch $f(\varnothing) := \varnothing$.

Beispiel 1.3 1. Ist $X \neq \varnothing$, so nennt man $\mathrm{id}_X : X \to X$, definiert durch $\mathrm{id}_X(x) := x$ für $x \in X$, die **identische Abbildung** auf X.
2. Es seien $X := Y := \mathbb{Z}$, und es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch[4]

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{Z}).$$

Dann ist $W(f) = f(\mathbb{N}_0)$ (und zwar die Menge der Quadratzahlen).

Definition 1.4 Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$.

1. f heißt **surjektiv** (oder Abbildung von X **auf** Y), falls $W(f) = Y$ gilt, d. h. zu jedem $y \in Y$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. [5]

2. f heißt **injektiv**, falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ folgt.

3. f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 1.5 Für jeden Mnege X ist die identische Abbildung id_X bijektiv. Ist f wie im Beispiel 1.3.2, so ist f weder surjektiv noch injektiv, dagegen ist $f|_{\mathbb{N}_0}$ injektiv.

[3] Man spricht dann auch von einem n-Tupel und im Fall $n = 2$ von einen geordneten Paar sowie im Fall $n = 3$ von einem Tripel.

[4] Die Schreibweise $(x \in X)$ ist im Weiteren als Kurzform von „für alle $x \in X$“ zu lesen.

[5] An dieser Stelle eine kleine Anmerkung zur Frage, ob *Abbildung* und *Funktion* unterschiedliche Begriffe sind: Gemäß obiger (informeller) Definition ist dies nicht der Fall. Man verwendet den Begriff Abbildung allerdings oft dann, wenn auch der Zielbereich eine wesentliche Rolle spielt, wie etwa im Fall der Surjektivität. Man spricht selten von einer surjektiven Funktion und so gut wie gar nicht von einer Funktion von X *auf* Y.

Definition 1.6 Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann heißt die Funktion $g \circ f : X \to Z$, definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \qquad (x \in X) ,$$

Komposition (oder **Hintereinanderausführung** oder **Verkettung**) von f und g.

Definition 1.7 Man setzt

$$Y^X := \mathrm{Abb}(X, Y) := \{f : f \text{ Abbildung von } X \text{ nach } Y\}$$

für Menge der Abbildungen von X nach Y. Sind $f, g \in Y^X$, so heißen f und g **gleich**, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.[6]

Beispiel 1.8 Ist f wie im Beispiel 1.3.2 und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $g(y) := y + 1$ für $y \in \mathbb{Z}$, so ist $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{Z}) .$$

Man beachte: Hier ist auch $f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert und es gilt

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2 \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Dabei ist $g \circ f \neq f \circ g$ (da etwa $(g \circ f)(1) = 2 \neq 4 = (f \circ g)(1)$).

Satz 1.9 *Es seien X, Y, Z, U Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ und $h : Z \to U$ Abbildungen. Dann gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

Beweis. Es gilt $h \circ (g \circ f) : X \to U$ sowie $(h \circ g) \circ f : X \to U$ und für alle $x \in X$ ist

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) .$$

Damit sind die beiden Funktionen gleich. □

[6]Wir werden uns gelegentlich – so wie üblich und sehr praktisch – die Freiheit nehmen, zwei Funktionen $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ schon dann zu identifizieren, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt und der Zielbereich keine Rolle spielt.

Bemerkung und Definition 1.10 Sind X, Y nichtleere Mengen und ist $f : X \to Y$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in Y$ *genau* ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Dann ist durch

$$g(y) := x \qquad (y \in Y) ,$$

wobei $y = f(x)$ eine Funktion $g : Y \to X$ definiert. Mann nennt g die **Umkehrfunktion** von f. Es gilt dann $g \circ f = \mathrm{id}_X$ sowie $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und außerdem ist auch $g : Y \to X$ bijektiv.

Definition 1.11 1. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ Mengen. Dann nennt man

$$X_1 \times \ldots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$$

kartesisches Produkt der Mengen.
2. Es sei M eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f : M \times M \to M$ heißt **Verknüpfung** auf M. Man schreibt in diesem Kontext xfy statt $f((x, y))$ für $(x, y) \in M \times M$. Gewohnt aus der Schule sind Verknüpfungen auf Zahlenmengen, etwa die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$. Wir werden diese Symbole auch in allgemeineren Situationen verwenden. Im Fall des Multiplikationszeichens $\cdot$ schreibt man meist kurz xy statt $x \cdot y$.

Wir betrachten nun Mengen und Verknüpfungen, die ein rudimentäres Rechnen zulassen.

Definition 1.12 Es seien M eine nichtleere Menge und $\cdot$ eine Verknüpfung auf M.
1. Die Verknüpfung $\cdot$ heißt **assoziativ**, falls $x\,(yz) = (xy)\,z$ für $x, y, z \in M$ gilt. In diesem Fall heißt $(M, \cdot)$ eine **Halbgruppe**. Bei assoziativen Verknüpfungen lässt man die Klammern meist weg, setzt also zum Beispiel $xyz := (xy)z = x(yz)$.
2. Die Verknüpfung heißt **kommutativ**, falls $xy = yx$ für $x, y \in M$ gilt. In diesem Fall heißt nennt man eine Halbgruppe **abelsch** oder auch **kommutativ**.
3. Ein $e \in M$ heißt **neutral** (bezüglich $\cdot$), falls

$$ex = xe = x \qquad (x \in M)$$

gilt. Existiert in einer Halbgruppe $(M, \cdot)$ ein neutrales Element e, so heißt das Tripel $(M, \cdot, e)$ ein **Monoid**.[7] Neutrale Elemente sind stets eindeutig, denn sind e und e' neutral, so ist $e' = ee' = e$.

[7] Man schreibt oft auch kurz M statt $(M, \cdot)$ im Falle einer Halbgruppe und M statt $(M, \cdot, e)$ im Falle eines Monoids.

Bemerkung und Definition 1.13 1. Das Paar $(\mathbb{N}, +)$ ist eine abelsche Halbgruppe, $(\mathbb{N}_0, +, 0)$, $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ sind abelsche Monoide.
2. Es sei $X \neq \varnothing$ ein Menge. Nach Satz 1.9 ist

$$\mathrm{Abb}(X) := \mathrm{Abb}(X, X)$$

mit der Komposition $\circ$ von Funktionen als Verknüpfung ein Monoid mit neutralem Element id_X.
3. Ist X eine Menge, so heißt die Menge

$$\mathscr{P}(X) := \{A : A \subset X\}$$

aller Teilmengen von X die **Potenzmenge** von X.[8] Damit sind $(\mathscr{P}(X), \cup, \varnothing)$ und $(\mathscr{P}(X), \cap, X)$ kommutative Monoide ([Ü]).

Bemerkung und Definition 1.14 Es sei $(M, \cdot, e)$ ein Monoid. Ist $x \in M$, so heißt ein $y \in M$ **invers** zu x, falls

$$yx = xy = e$$

gilt.[9] Existiert ein Inverses, so nennt man x **invertierbar**. Ist jedes $x \in M$ invertierbar, so heißt M eine **Gruppe**.
Inverse Elemente sind im Falle der Existenz eindeutig, denn sind y, y' invers zu x, so gilt

$$y = ye = y(xy') = (yx)y' = ey' = y'.$$

Man bezeichnet das inverse Element zu x mit x^{-1}. Bei Verwendung des Verknüpfungszeichens $+$ schreibt man meist $-x$ und dann auch kurz $x - y$ statt $x + (-y)$.
Ist $a \in M$ invertierbar, so ist die Funktion $f_a : M \to M$ bijektiv mit Umkehrfunktion $g_a : M \to M$ gegeben durch $g_a(y) = a^{-1}y$, also mit anderen Worten: Für jedes $y \in M$ hat die Gleichung $ax = y$ genau ein Lösung, nämlich $a^{-1}y$. Entsprechendes gilt für die Gleichung $xa = y$.

Beispiel 1.15 Die Tripel $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, 0)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sind abelsche Gruppen. Im Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ sind nur ± 1 invertierbar.

[8] Stets ist $\varnothing \in \mathscr{P}(X)$.
[9] Allgemeiner heißt y **linksinvers** zu x, falls $yx = e$ gilt, und **rechtsinvers** zu x, falls $xy = e$ gilt.

Bemerkung 1.16 Es sei $(M, \cdot, e)$ ein Monoid. Sind $x, y \in M$ invertierbar, so ist wegen

$$xyy^{-1}x^{-1} = xx^{-1} = e = y^{-1}y = y^{-1}x^{-1}xy$$

auch xy invertierbar mit

$$(xy)^{-1} \;=\; y^{-1}x^{-1}$$

und damit die Menge U der invertierbaren Elemente ein Monoid. Wegen $x^{-1}x = xx^{-1} = e$ ist auch x^{-1} invertierbar mit $(x^{-1})^{-1} = x$, also insbesondere damit $(U, \cdot, e)$ eine Gruppe.[10]

Bemerkung und Definition 1.17 Nach Bemerkung 1.16 ist

$$S(X) \;:=\; \{f \in \mathrm{Abb}(X) : f \text{ invertierbar}\}$$

eine Gruppe, genannt **symmetrische Gruppe** von X. Ein Element $f \in S(X)$ heißt **Permutation** auf X. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt speziell $S_n := S(\{1, \ldots, n\})$ die n-te symmetrische Gruppe. Für $n \geq 3$ ist S_n *nicht* abelsch ([Ü]).
Jede bijektive Funktion $f : X \to X$ ist invertierbar und umgekehrt kann leicht sehen ([Ü]]), dass jedes $f \in S(X)$ bijektiv ist, und dass dann f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist. Man schreibt daher üblicherweise auch f^{-1} für die Umkehrfunktion im Allgemeinen.

Wir wollen nun Produkte und Summen von mehr als zwei Faktoren beziehungsweise Summanden definieren.

Bemerkung und Definition 1.18 Es seien $(M, \cdot, e)$ ein Monoid, $m, N \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq N$ und $x_m, \ldots, x_N \in M$. Dann setzt man $\prod_{k=m}^{m-1} x_k := e$ und definiert **rekursiv**

$$x_m \cdot \ldots \cdot x_n := \prod_{k=m}^{n} x_k := \Big(\prod_{k=m}^{n-1} x_k\Big) \cdot x_n$$

für $n = m, \ldots, N$. Außerdem schreibt man im Falle $x_1 = \ldots = x_n = x$ kurz

$$x^n := \prod_{k=1}^{n} x.$$

[10] mit $\cdot$ eingeschränkt auf $U \times U$ und Zielbereich U

Insbesondere ist damit $x^0 = e$. Ist x invertierbar, so setzt man auch $x^{-n} := (x^{-1})^n$ für $n \in \mathbb{N}$.
Im Falle des Pluszeichens als Verknüpfung schreibt man statt $\prod$ jeweils $\sum$. Außerdem schreibt man dann nx statt x^n. [11]

Eng verbunden mit dem eben verwendeten Prinzip der rekursiven Definition ist ein wichtiges Beweisverfahren: die **vollständige Induktion**.
Für ein $m \in \mathbb{Z}$ und alle $\mathbb{Z} \ni n \geq m$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Zum Beweis der Behauptung

$$\textit{für alle } n \in \mathbb{Z} \textit{ mit } n \geq m \textit{ gilt } A(n)$$

geht man oft folgendermaßen vor:

1. Man zeigt, dass $A(m)$ richtig ist (Induktionsanfang).
2. Man nimmt an, dass $A(n)$ oder auch $A(m), \ldots, A(n)$ für ein beliebiges $n \geq m$ richtig ist (Induktionsannahme) und zeigt, dass aus der Induktionsannahme die Richtigkeit der Aussage $A(n+1)$ folgt (Induktionsschritt).

Aus 1. und 2. ergibt sich, dass $A(n)$ für alle $n \geq m$ richtig ist. [12]

Beispiel 1.19 Wir illustrieren die Beweistechnik anhand eines Beispieles. Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n} \; .$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind rechte und linke Seite 0.
Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{n} \; .$$

Induktionsschritt: Nach Induktionsannahme gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{n-1}{n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

und damit die Behauptung für $n+1$.

[11] Man beachte, dass die Abbildung $(n, x) \mapsto nx$ im Allgemeinen keine Verknüpfung auf M ist.
[12] Denn es gilt ja dann $A(m) \Rightarrow A(m+1) \Rightarrow A(m+2) \ldots$.

Bemerkung und Definition 1.20 Es sei $(M, \cdot, e)$ ein Monoid. Induktiv kann man zeigen, dass für $x, y \in M$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ folgende Potenzgesetze gelten:

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn} .$$

Ist M abelsch, so gilt auch

$$x^n y^n = (xy)^n.$$

Allgemeiner kann man dann (induktiv und nicht leicht) zeigen, dass für $\varphi \in S_n$ und $x_1, \ldots, x_n \in M$

$$\prod_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} = \prod_{k=1}^{n} x_k$$

gilt, d. h. die Reihenfolge der Faktoren kann beliebig vertauscht werden. Damit werden Schreibweisen wie $\prod\limits_{j \in I} x_j$ und $\sum\limits_{j \in I} x_j$, wobei I eine beliebige endliche Menge ist und $x_j \in M$ für $j \in I$ gilt, sinnvoll.
Im Fall invertierbarer x bzw. y gelten die Potenzgesetze auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.

Wir kommen jetzt zu algebraischen Strukturen mit zwei Verknüpfungen.

Bemerkung und Definition 1.21 Es sei R eine Menge und es seien $+$ und $\cdot$ Verknüpfungen auf R. Dann heißt $\cdot$ **distributiv** über $+$, falls für $x, y, z \in R$ gilt

$$x(y+z) = (xy) + (xz) \qquad \text{und} \qquad (x+y)z = (xz) + (yz).$$

Gilt

(R1) $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe,

(R2) $(R, \cdot, 1)$ ist ein Monoid,

(R3) $\cdot$ ist distributiv über $+$,

so heißen $(R, +, \cdot)$ **Ring**, das neutrale Element 0 zu $+$ **Nullelement** oder kurz **Null** und das neutrale Element 1 zu $\cdot$ **Einselement** oder **Eins**.[13] Ist $(R, \cdot, 1)$ abelsch, so heißt der Ring **kommutativ**.
Standardbeispiele kommutativer Ringe sind $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Man verwendet wie dort auch in allgemeinen Ringen Punkt-vor-Strich-Schreibweisen, also zum Beispiel $x + yz := x + (yz)$.

[13] Manchmal schreibt man deutlicher 0_R und 1_R für die neutralen Elemente eines Ringes. Andererseits schreibt man oft kurz R statt $(R, +, \cdot)$.

Bemerkung 1.22 Es seien R ein Ring und X eine nichtleere Menge. Wir definieren für $f, g \in R^X$ die Funktionen $f \pm g \in R^X$ und $f \cdot g \in R^X$ argumentweise durch

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in X).$$

Damit ist $R^X = (R^X, +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement 0_{R^X} und Einselement 1_{R^X}, definiert durch $0_{R^X}(x) := 0_R$ und $1_{R^X}(x) := 1_R$ für $x \in X$. Ist R kommutativ, so ist auch R^X kommutativ.

Bemerkung und Definition 1.23 Es sei R ein Ring. Induktiv ergeben sich für $x \in R$ und endliche Familien $(x_j)_{j\in I}$ in R die allgemeinen **Distributivgesetze**

$$x \sum_{j\in I}^{n} x_j = \sum_{j\in I} x x_j \quad \text{und} \quad \Big(\sum_{j\in I} x_j\Big) x = \sum_{j\in I} x_j x.$$

Weiter ist 0 **absorbierend**, d. h. für $x \in R$ gilt

$$0x = x0 = 0.$$

> Denn: Wegen $0x = (0+0)x = 0x+0x$ ist $0 = 0x-0x = (0x+0x)-0x = 0x$. Entsprechend sieht man, dass $x0 = 0$ gilt.

Damit gilt für $x, y, z \in R$ ([Ü])

$$x(y-z) = xy - xz, \quad (x-y)z = xz - yz \quad \text{und} \quad (-x)(-y) = xy.$$

In der Schule lernt man die binomischen Formeln für reelle Zahlen in folgender Form kennen:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{und} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Wir werden jetzt allgemeinere Formeln in Ringen herleiten, wobei er Exponent 2 durch ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ersetzt wird.

Satz 1.24 *Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$ und alle $n \in \mathbb{N}$*

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \,. \tag{1.1}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} aa^k b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} ba^k b^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n - b^n \ .\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.25 Als Spezialfall $b = 1$ ergibt sich die wichtige **geometrische Summenformel**: Für $a \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n - 1 \;=\; (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = (a-1)(1 + a + \ldots + a^{n-1}), \tag{1.2}$$

die unter anderem eine zentrale Rolle im Zusammenhang mit der Binär-, Dezimal- bzw. Hexadezimaldarstellung natürlicher Zahlen spielt (siehe Anhang B).

Wir steuern nun auf eine Darstellung für Ausdrücke der Form $(a + b)^n$.

Bemerkung und Definition 1.26 Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{n}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{0}{k} := 0.$$

Damit sind die **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (gesprochen n über k) rekursiv bezüglich n definiert durch

$$\binom{n+1}{k} := \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}).$$

Aus der Defintion folgt, dass alle Binomialkoeffizienten nichtnegative ganze Zahlen sind mit

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad (k > n).$$

Ordnet man die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ in einem dreieckigen Schema an, wobei in der n-ten Zeile (mit Zeile 0 beginnend) die Koeffizienten $\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{n}$ stehen, so entsteht das **Pascalsche Dreieck**:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Binomialkoeffizienten lassen sich geschlossen darstellen, jedenfalls unter Verwendung von Fakultäten.

Definition 1.27 Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man n-**Fakultät** durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n\,, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

So ist etwa $6! = 1 \cdot 2 \cdots 6 = 720$.

Satz 1.28 *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

Beweis. Wir zeigen die Darstellung per Induktion nach n.
Für $n = 0$ (und dann $k = 0$) sind nach den jeweiligen Definitionen beide Seiten 1. Gilt die Behauptung für $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt für $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n+1-k)!}\big(k + (n+1-k)\big) = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n}{n} + 0 = 1$. □

Mit der Darstellung sieht man insbesondere die Symmetrie der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} . \tag{1.3}$$

Satz 1.29 (**binomischer Satz**)
Es sei $(R,+,\cdot)$ *ein kommutativer Ring. Dann gilt für alle* $a, b \in R$ *und alle* $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Beweis. 1. Für $n = 0$ gilt $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$.

2. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Dann folgt mit Satz 1.28

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \ + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} .
\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.30 Für $n = 6$ gilt (siehe Pascalesches Dreieck)

$$(a+b)^6 = 1 \cdot b^6 + 6 \cdot ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + 1 \cdot a^6 .$$

Bemerkung 1.31 Als Spezialfälle aus Satz 1.29 ergeben sich interessante Beziehungen für das Pascalsche Dreieck: Für $R = \mathbb{Z}$ und $a = 1$, $b = 1$ ergibt sich

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ,$$

das heißt die Summe der Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks ergibt stets 2^n. Für $a = -1$, $b = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$0 = 0^n = \big((-1)+1\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k ,$$

das heißt, versieht man die Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile jeweils abwechselnd mit dem Vorzeichen $+$ und $-$, so erhält man als Summe den Wert 0. Für $n = 6$ gilt etwa

$$1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6 \quad \text{und} \quad 1-6+15-20+15-6+1 = 0 .$$

Bemerkung und Definition 1.32 Ist $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement 0 und Einselement $1 \neq 0$, so setzen wir

$$R^* := R \setminus \{0\}.$$

Dann heißt R ein **Körper**, falls R kommutativ ist und jedes $x \in R^*$ invertierbar ist.[14] Nach Bemerkung 1.16 ist $(R^*, \cdot, 1)$ eine eine abelsche Gruppe und damit sind Körper **nullteilerfrei**, d. h. sind $x, y \in R$ mit $xy = 0$, so ist $x = 0$ oder $y = 0$. Man schreibt $y/x := yx^{-1}$ für $x \neq 0$ und wegen der Kommutativität auch $\dfrac{y}{x} := y/x$.

Beispiel 1.33 1. Der Ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper, der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nicht.
2. Es sei $\mathbb{F}_2 := \{\heartsuit, \clubsuit\}$, wobei die Addition und die Multiplikation durch die folgenden Verknüpfungstafeln (kommutativ) definiert sind:

$+$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$

$\cdot$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$

Man kann leicht nachrechnen, daß $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist, genannt der **Binärkörper**. Dabei gilt $\heartsuit = 0 = 0_{\mathbb{F}_2}$ und $\clubsuit = 1 = 1_{\mathbb{F}_2}$, also ist in der Binärarithmetik $1 + 1 = 0$.

[14] Verzichtet man auf die Forderung der Kommutativität, so spricht man von einem Schiefkörper.

2 Reelle und komplexe Zahlen

Bemerkung und Definition 2.1 Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge. Man nennt eine Teilmenge R von $X \times X$ auch eine **Relation** auf X und schreibt xRy falls $(x, y) \in R$.[15] Eine Relation $<$ auf X heißt (strenge) **Ordnung** auf X, falls gilt

(O1) Für alle $x, y \in X$ gilt entweder $x = y$ oder $x < y$ oder $y < x$ (Trichotomie).

(O2) Für $x, y, z \in X$ gilt: aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivität).

Das Paar $(X, <)$ heißt dann eine **geordnete Menge**. Außerdem bedeutet $x \leq y$, dass entweder $x < y$ oder $x = y$ gilt.[16] Wenig überraschend schreibt man auch $y > x$ statt $x < y$ und $y \geq x$ statt $x \leq y$.

Bemerkung und Definition 2.2 Es sei R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Ist $<$ eine Ordnung auf R, so heißt $R = (R, +, \cdot, <)$ ein **geordneter Ring**, falls für $x, y \in R$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(O3) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in R$ (1. Monotoniegesetz).

(O4) Aus $x < y$ und $z > 0$ folgt $xz < yz$ (2. Monotoniegesetz).

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ ist ein geordneter Ring und $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ist ein geordneter Körper.
Ist R geordnet, nennt man $x \in R$ **positiv**, falls $x > 0$ gilt und **negativ**, falls $x < 0$ gilt. Aus (O3) folgt, dass x genau dann positiv ist, wenn $-x$ negativ ist.[17]

> Denn: Aus $0 < x$ folgt $-x = 0 + (-x) < x + (-x) = 0$. Entsprechend folgt aus $-x < 0$ auch $0 = x + (-x) < x + 0 = x$.

Wir setzen noch $R_+ := \{x \in R : x > 0\}$ und $R_- := \{x \in R : x < 0\}$.

Satz 2.3 *Es seien $R = (R, +, \cdot, <)$ ein geordneter Ring, $x, y \in R$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

[15] Sind M eine Menge und $f : M \to X$ eine Funktion, so ist der **Graph** $\{(x, f(x)) : x \in M\} \subset M \times X$ von f im Fall $M \subset X$ eine Relation auf X.

[16] Die Relation $\leq$ ist dann eine sogenannte schwache Ordnung auf X.

[17] Insbesondere existiert damit im Binärkörper $\mathbb{F}_2$ keine Ordnungsrelation mit der Eigenschaft (O3).

1. *Aus* $x, y > 0$ *oder* $x, y < 0$ *folgt* $xy > 0$ *und aus* $x > 0$, $y < 0$ *folgt* $xy < 0$. *Speziell sind* $x^2 > 0$ *für* $x \neq 0$ *und* $1 > 0$.

2. *Ist* $x < y$, *so gilt* $nx < ny$ *und im Falle* $x > 0$ *auch* $0 < x^n < y^n$.

3. *Sind* $x > 0$ *und* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m > n$, *so ist* $mx > nx > 0$.[18]

Beweis. 1. Sind $x, y > 0$, so folgt mit (O4) sofort $0 = 0y < xy$. Sind andererseits $x, y < 0$, so sind $-y, -x > 0$ und damit $xy = (-x)(-y) > 0$. Sind $x, -y > 0$, so gilt $-(xy) = x(-y) > 0$. Ist $x \neq 0$, so ist $x > 0$ oder $x < 0$ nach (O1), also $x^2 > 0$. Wegen $1 \neq 0$ ist $1 = 1^2 > 0$.
2. und 3. als [Ü]. □

Satz 2.4 (Bernoulli-Ungleichung)
Sind R *ein geordneter Ring und* $n \in \mathbb{N}_0$, *so gilt* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ *für* $x \geq -1$.

Beweis. Denn: Für $n = 0$ sind beide Seiten 1. Gilt die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt wegen $x + 1 \geq 0$ mit (O4) und Satz 2.3

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

□

Satz 2.5 *Es seien* K *ein geordneter Körper und* $x, y \in K$. *Gilt* $0 < x < y$, *so ist* $0 < 1/y < 1/x$. *Außerdem ist die Menge* $\{z \in K : x < z < y\}$ *unendlich.*

Beweis. Zunächst folgt $1/x > 0$ aus Satz 2.3.1 (wäre $1/x < 0$, so wäre $1 = x/x < 0$). Genauso ist $1/y > 0$. Aus $x < y$ ergibt sich also $x/y < y/y = 1$ mit (O4) und wieder mit (O4)

$$1/y = (x/y) \cdot (1/x) < 1 \cdot (1/x) = 1/x\ .$$

Nach Satz 2.3 ist $m1 > n1 > 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, also $0 < 1/(m1) < 1/(n1)$ und folglich $x < x + (y - x)/(m1) < x + (y - x)/(n1) \leq y$. □

[18]Damit ist R_+ unendlich. Genauer enthält R_+ die natürlichen Zahlen in dem Sinne, dass man $n1$ mit n identifiziert.

Bemerkung und Definition 2.6 Ist K ein Körper und sind $a, b, c \in K$ mit $a \neq 0$, so hat die Gleichung $ax+b = 0$ genau eine Lösung, nämlich $x = -b/a$. Im Allgemeinen sind quadratische Gleichungen der Form[19]

$$0 = ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

nicht mehr lösbar (hier setzen wir $1+1 \neq 0$ und damit $2^n a \neq 0$ voraus). Ist K geordnet, so folgt aus Satz 2.3, dass notwendig die **Diskriminante**

$$\Delta := b^2 - 4ac$$

nicht-negativ ist. Aber auch in diesem Fall ist nicht stets Lösbarkeit garantiert. So haben etwa die Gleichungen $x^2 + x - 1 = 0$ und $x^2 - 2 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$ ([Ü]) obwohl die Diskriminate in beiden Fällen positiv ist.

Wir erweitern nun $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ zu einem geordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ so, dass quadratische Gleichungen mit nichtnegativer Diskriminante lösbar sind. Anschließend erweitern wir $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu einem Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ so, dass *alle* quadratischen Gleichungen lösbar sind.

Bemerkung und Definition 2.7 Es seien $(X, <)$ geordnet und $M \subset X$.
1. M heißt **nach oben beschränkt**, wenn ein $s \in X$ existiert mit $x \leq s$ für alle $x \in M$. Ein solches s heißt dann eine **obere Schranke** von M. Ist dabei $s \in M$, so heißt s **Maximum** von M. Man schreibt dann

$$\max M := s.$$

Eine obere Schranke $s^* \in X$ von M heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von M, falls $s \geq s^*$ für jede obere Schranke s von M gilt. Hieraus ergibt sich sofort, dass für jedes M höchstens ein Supremum und ein Infimum existieren. Wir schreiben im Falle der Existenz

$$\sup M := s^*$$

2. M heißt **nach unten beschränkt**, wenn ein $s \in X$ existiert mit $x \geq s$ für alle $x \in M$. Ein solches s heißt dann **untere Schranke** von M. Ist dabei $s \in M$, so heißt s **Minimum** von M. Man schreibt dann

$$\min M := s.$$

[19] die zweite Darstellung, die sich durch quadratische Ergänzung ergibt, nennt man Scheitelpunktform.

Eine untere Schranke $s_* \in X$ von M heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von M, falls $s \leq s_*$ für jede untere Schranke s von M gilt. Wieder gibt es höchstens ein Infimum, bezeichnet mit

$$\inf M := s_* .$$

3. M heißt **beschränkt**, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkung 2.8 Existiert $\max M$, so gilt $\sup M = \max M$ und im Falle der Existenz von $\min M$ ist $\inf M = \min M$. Außerdem existieren für endliche Mengen stets Maximum und Minimum. Weiter kann man zeigen ([Ü]), dass jede nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ein Maximum (bzw. Minimum) hat. In $\mathbb{Q}$ ist dies im Allgemeinen nicht der Fall: Für $M := \mathbb{Q}_+$ etwa gilt $\inf M = 0$.

> Denn: Zunächst ist 0 eine untere Schranke von M. Ist $s > 0$, so existieren nach Satz 2.5 Punkte $x \in \mathbb{Q}_+$ mit $x < s$. Also ist s keine untere Schranke von M. Damit ist jede untere Schranke $s \leq 0$.

Wegen $0 \notin M$ hat M kein Minimum.

Bemerkung und Definition 2.9 Eine geordnete Menge $(X, <)$ heißt **ordnungsvollständig** oder kurz **vollständig**, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von X ein Supremum hat. Ein geordneter Körper $(K, +, \cdot, <)$ heißt **vollständig (geordnet)**, falls $(K, <)$ ordnungsvollständig ist.
Von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik ist das folgende Ergebnis:

> *Es existiert ein vollständig geordneter Körper* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ *so, dass* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ *eingebettet ist.*

Man kann zeigen, dass in gewissem Sinne nur ein vollständig geordneter Körper existiert. Die Elemente von $\mathbb{R}$ heißen **reelle Zahlen**. Wir werden in der Vorlesung plus (im Anhang B) genauer auf eine mögliche Konstruktion der reellen Zahlen und einen Beweis zur obigen Aussage eingehen.

Bemerkung und Definition 2.10 Manchmal ist es praktisch und sinnvoll, die geordnete Menge $(\mathbb{R}, <)$ um zwei Punkte $+\infty$ (oder kurz ∞) und $-\infty$ so zu erweitern, dass definitionsgemäß $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für $M \subset \mathbb{R}$ ist damit $\sup M = \infty$, falls M nach oben unbeschränkt ist, und $\inf M = -\infty$, falls M nach unten unbeschänkt ist. Eine nichtleere Menge $I \subset \mathbb{R}$ heißt **Intervall**, falls $x \in I$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\inf I < x < \sup I$ gilt. Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ setzt man

$$\begin{aligned}
(a,b) &:=]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \text{ falls } -\infty \leq a < b \leq \infty, \\
[a,b) &:= [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \text{ falls } -\infty < a < b \leq \infty, \\
(a,b] &:=]a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \text{ falls } -\infty \leq a < b < \infty. \\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \text{ falls } -\infty < a \leq b < \infty.
\end{aligned}$$

Jedes Intervall hat eine solche Form, wobei stets $a = \inf I$ und $b = \sup I$ gilt.

Satz 2.11 (Quadratwurzeln) *Die Abbildung $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f(x) := x^2$ ist bijektiv. Für $y \geq 0$ schreibt man $\sqrt{y} := f^{-1}(y)$. Die Lösungen der Gleichung $x^2 = y$ sind damit gegeben durch $\pm\sqrt{y}$.*

Beweis. Aus Satz 2.3 folgt, dass f injektiv ist. Zum Nachweis der Surjektivität sei $y \geq 0$ gegeben. Wir betrachten die Menge $M := \{x \in [0,\infty) : x^2 \leq y\}$. Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1 + y$, so gilt $x^2 > (1+y)^2 > y$. Damit ist $1 + y$ obere Schranke vom M. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $s := \sup M$. Wir zeigen, dass weder $s^2 > y$ noch $s^2 < y$ gelten kann. Damit ist $s^2 = y$ nach (O1) und $\pm\sqrt{y}$ die Lösungen von $x^2 = y$.[20]
Angenommen, es ist $s^2 > y$. Dann ist $\delta := (s^2 - y)/(2s) > 0$ und wegen $2\delta s = s^2 - y$

$$(s - \delta)^2 \geq s^2 - 2\delta s = y.$$

Ist $x \in M$, so folgt $x^2 \leq y \leq (s-\delta)^2$ und damit auch $x \leq s - \delta$. Also ist $s - \delta$ obere Schranke von M im Widerspruch dazu, dass s kleinste obere Schranke ist.
Angenommen, es ist $s^2 < y$. Dann ist $\delta := \min\{1, (y^2 - s)/(2s+1)\} > 0$ und wegen $2s + \delta \leq 2s + 1$ gilt

$$(s+\delta)^2 - s^2 = \delta(2s+\delta) \leq \delta(2s+1) \leq y - s^2,$$

also $(s+\delta)^2 \leq y$. Damit ist $s + \delta \in M$ und folglich s keine obere Schranke von M. Also ergibt sich auch hier ein Widerspruch. $\square$

[20] Der Beweis zeigt auch, dass $\mathbb{Q}$ kein vollständig geordneter Körper ist, da ansonsten etwa die Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung in $\mathbb{Q}$ hätte.

Bemerkung 2.12 (a-b-c-Formel) Es seien a, b, c, Δ wie in Bemerkung und Definition 2.6, also $a \neq 0$ und $\Delta \geq 0$. Nach Satz 2.11 ist dann die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lösbar und die Lösungen x_1, x_2 sind gegeben durch

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\big(- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\big).$$

Satz 2.13 (Dichtheit von $\mathbb{Q}$)
$\mathbb{N}$ ist unbeschränkt in $\mathbb{R}$ [21] *und für jedes nicht einpunktige Intervall I gilt $I \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.*

Beweis. 1. Angenommen, $\mathbb{N}$ sei nach oben beschränkt in $\mathbb{R}$. Dann existiert $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Da s kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, ist $s - 1/2$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1/2$. Dann ist aber $s + 1/2 < n + 1 \in \mathbb{N}$. Widerspruch zu s obere Schranke von $\mathbb{N}$.
2. Es seien $x, y \in I$ mit $x < y$. Zu zeigen ist, dass ein $r \in \mathbb{Q}$ existiert mit $x < r < y$. Ist $\delta := y - x$, so existiert nach 1. ein $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1/\delta$, also $1/q < \delta$. Ist ohne Einschränkung $y > 0$ und $p := \max\{k \in \mathbb{N} : k < qy\}$, so ist $p/q < y$ und $(p+1)/q \geq y$, also auch $r := p/q \geq y - 1/q > y - \delta = x$. □

Unser Ziel ist es nun, den Körper der reellen Zahlen so zu erweitern, dass die quadratische Gleichung $x^2 = y$ auch für $y < 0$ lösbar ist.

Bemerkung und Definition 2.14 Wir betrachten die abelsche Gruppe

$$(\mathbb{R}^2, +, (0,0)) = (\mathbb{R}^{\{1,2\}}, +, 0)$$

aus Bemerkung 1.22. Mit der dort allgemein definierten argumentweisen Multiplikation ist $\mathbb{R}^2$ zwar ein kommutativer Ring, aber nicht nullteilerfrei und damit insbesondere kein Körper. Wir definieren alternativ für $x = (s,t)$ und $y = (u,v)$ in $\mathbb{R}^2$

$$x \cdot y = (s,t) \cdot (u,v) := (su - tv, sv + tu).$$

Man rechnet nach ([Ü]), dass damit $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper ist mit $1_{\mathbb{R}^2} = (1,0)$ und

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{s}{s^2 + t^2}, \frac{-t}{s^2 + t^2}\right) \quad (x \neq (0,0)).$$

[21] Geordnete Körper mit dieser Eigenschaft nennt man archimedisch geordnet.

Legt man diese Multiplikation zugrunde, so schreibt man $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}^2$ und nennt die Elemente von $\mathbb{C}$ **komplexe Zahlen**.[22] Traditionell verwendet man meist z oder w als Bezeichnung für eine komplexe Zahl.
Aus der Definition der Addition und der Multiplikation ergibt sich

$$(s,0)+(u,0)=(s+u,0) \quad \text{und} \quad (s,0)(u,0)=(su,0),$$

das heißt, Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen $(s,0)$ und $(u,0)$ entsprechen der Addition und der Multiplikation von s und u in $\mathbb{R}$. Indem wir die komplexe Zahl $(s,0)$ mit der reellen s identifizieren, können wir den Körper $\mathbb{C}$ damit als Erweiterung des Körpers $\mathbb{R}$ auffassen. Wir schreiben dann auch kurz s statt $(s,0)$. Man nennt weiterhin

$$\mathrm{i} := (0,1) \in \mathbb{C}$$

die **imaginäre Einheit** in $\mathbb{C}$. Für i gilt

$$\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1\,.$$

Für reelle $y<0$ sind damit $\pm\mathrm{i}\sqrt{-y}$ die Lösungen von $z^2=y$. Nach Satz 2.3 gibt es keine Ordnung auf $\mathbb{C}$ so, dass $\mathbb{C}$ zu einem geordneten Körper wird.

Bemerkung und Definition 2.15 Unter Verwendung der imaginären Einheit kann man jedes $z=(s,t)\in\mathbb{C}$ in der Form

$$z=(s,t)=(s,0)+(0,1)(t,0)=s+t\mathrm{i}$$

schreiben. Diese Darstellung heißt **Normalform** (oder **kartesische Form**) von z. So ist etwa $z=(3,1)=3+\mathrm{i}$ und für $w=1-2\mathrm{i}$ gilt

$$z\cdot w=(3+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=5-5\mathrm{i}\;.$$

Weiter nennt man $\operatorname{Re} z := s$ **Realteil** von z und $\operatorname{Im} z := t$ **Imaginärteil** von z sowie

$$\overline{z} := s - t\mathrm{i}$$

konjugiert komplex zu z.[23] So ist etwa $\overline{3+\mathrm{i}} = 3-\mathrm{i}$.

[22] Damit ist $\mathbb{C}$ nichts anderes als der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Bonus der Multiplikation $\cdot$, die bei erstem Faktor in $\mathbb{R}$ nichts anderes als die Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$ ist.

[23] Geometrisch entsteht $\overline{z}$ durch Spiegelung von z an der reellen Achse.

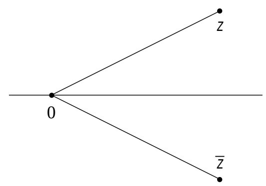


Abbildung 1: z und $\overline{z}$

Für $z, w \in \mathbb{C}$ ergibt sich leicht

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \overline{(\overline{z})} = z$$

sowie $2\,\mathrm{Re}(z) = z + \overline{z}$ und $2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = z - \overline{z}$.

Bemerkung und Definition 2.16 Es sei $z = (s,t) = s + t\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Die nichtnegative reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{s^2 + t^2}$$

heißt **Betrag** von z.[24] Insbesondere ist damit $|z| > 0$ falls $z \neq 0$ und $|s| = \sqrt{s^2}$. Aus der Definition ergibt sich sofort $|z| = |\overline{z}| = |-z|$, $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ und $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$ sowie ([Ü])

$$|z|^2 = z\overline{z} \quad \text{und} \quad 1/z = \overline{z}/|z|^2, \text{ falls } z \neq 0.$$

Für $z = 3 + \mathrm{i}$ etwa gilt $z\overline{z} = (3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 9 + 1 = |z|^2$ und $|z| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

Satz 2.17 *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $\langle z, w\rangle := \mathrm{Re}(z\overline{w})$.*[25] *Dann gilt*

1. $|zw| = |z|\,|w|$ *und* $|\langle z, w\rangle| \leq |z|\,|w|$.
2. $|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\,\langle z, w\rangle + |w|^2$.
3. (**Dreiecksungleichung**) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. 1. Nach Bemerkung und Definition 2.16 gilt

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$

[24] Der Betrag $|z|$ beschreibt nach dem Satz von Pythagoras anschaulich die Länge der Strecke von 0 nach z in der euklidschen Ebene.

[25] das kanonische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$.

Durch Wurzelziehen ergibt sich die erste Behauptung und die zweite folgt daraus mit $|\mathrm{Re}(z\overline{w})| \leq |z\overline{w}|$ und $|\overline{w}| = |w|$.
2. Wieder mit Bemerkung und Definition 2.16 gilt wegen $w\overline{z} = \overline{z\overline{w}}$

$$|z \pm w|^2 = (z \pm w)(\overline{z} \pm \overline{w}) = z\overline{z} \pm z\overline{w} \pm w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2\,.$$

3. Nach 1. und 2. ist $|z \pm w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$. Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung und Definition 2.18 Wir schreiben

$$\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

für den **Einheitskreis** in $\mathbb{C}$. Ist $z \in \mathbb{C}^*$, so gilt $z = r\zeta$ mit $r = |z| > 0$ und $\zeta = z/|z| \in \mathbb{S}$. Sind $r' > 0$ und $\zeta' \in \mathbb{S}$ mit $z = r'\zeta'$, so ist $r' = r$ und $\zeta' = \zeta$. Also hat jedes $z \in \mathbb{C}^*$ genau eine multiplikative Zerlegung $z = r\zeta$ mit $r > 0$ und $\zeta \in \mathbb{S}$. Diese Darstellung von z nennt man die **Polarform** von z.

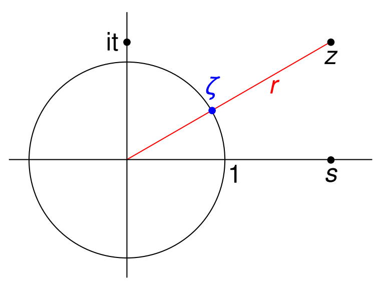


Abbildung 2: Polarform $z = r\zeta$.

3 Grenzwerte und Stetigkeit

Analysis kann man als die Mathematik von Grenzwerten ansehen. Dabei spielt die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine entscheidende Rolle. Im Weiteren sei stets

$$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},$$

also $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen.

Definition 3.1 Eine Menge $B \subset \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls ein $R > 0$ existiert mit $|z| \leq R$ für alle $z \in B$.
Sind X eine Menge und $f : X \to \mathbb{C}$. so heißt f **beschränkt** falls $W(f) \subset \mathbb{C}$ beschr̈ankt ist. Weiter schreiben wir $Z(f)$ für die Menge der Nullstellen von f, also

$$Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

In Ergänzung zu Bemerkung und Definition 1.22 definieren wir für nullstellenfreies $g : X \to \mathbb{C}$ die Funktion $1/g : X \to \mathbb{C}$ durch

$$(1/g)(x) := 1/g(x) \qquad (x \in X)$$

und damit auch $f/g := f \cdot (1/g)$.

Definition 3.2 Ist $X \subset \mathbb{K}$, so heißt ein Punkt $a \in \mathbb{K}$ ein **Häufungspunkt** von X, falls für alle $\delta > 0$ ein $x \in X$ existiert mit $0 < |x - a| < \delta$.[26] Wir schreiben X' für die Menge aller Häufungspunkte von X. Ist $a \in X$ und kein Häufungspunkt von X, so heißt a ein **isolierter Punkt** von X.
Wir denken uns $\mathbb{K}$ um einen Punkt ω erweitert und schreiben im Fall unbeschränkter $X \subset \mathbb{K}$ auch $\omega \in X'$, sprechen dabei aber nicht von einem Häufungspunkt.

Beispiel 3.3 Für $X = \mathbb{N}$ ist $\omega \in X'$ (archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$). Zudem ist jedes $a \in \mathbb{N}$ ein isolierter Punkt von $\mathbb{N}$. Für $X = \{1/k,\, k \in \mathbb{N}\}$ ist $0 \in X'$.

Definition 3.4 Es seien $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $\rho > 0$. Für $a \neq \omega$ setzen wir

$$U_\rho(a) := U_{\rho,X}(a) := \{x \in X : |x - a| < \rho\} \quad \text{und} \quad \dot{U}_\rho(a) := \dot{U}_{\rho,X}(a) := U_\rho(a) \setminus \{a\}.$$

[26] Man beachte, dass a nicht in X liegen muss.

Die Menge $U_\rho(a)$ heißt ρ-**Umgebung** von a (bezüglich X). Im Falle $X = \mathbb{R}$ ist $U_\rho(a)$ das Intervall $(a-\rho, a+\rho)$, und im Falle $X = \mathbb{C}$ ist $U_\rho(a)$ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius ρ. Außerdem setzen wir

$$\dot{U}_\rho(\omega) := \dot{U}_{\rho,X}(\omega) := \{x \in X : |x| > 1/\rho\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen ist $a \in X'$ genau dann, wenn $\dot{U}_{\rho,X}(a) \neq \varnothing$ für jedes $\rho > 0$ gilt.

Bemerkung und Definition 3.5 Ist $X \subset \mathbb{K}$ und ist $a \in X'$, so heißt $f : X \to \mathbb{C}$ **abklingend** an a, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Ist f abklingend an a und ist $g : X \to \mathbb{C}$ mit $|g(x)| \leq R|f(x)|$ für eine Konstante $R \geq 0$, so ist auch g abklingend an a. Außerdem sind mit f und g auch $f \pm g$ abklingend an a.

> Denn: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren $\delta, \eta > 0$ mit $|f(x)| < \varepsilon/2$ für $x \in \dot{U}_\delta(a)$ und $|g(x)| < \varepsilon/2$ für $x \in \dot{U}_\eta(a)$. Also gilt für $\rho = \min\{\delta, \eta\}$ und $x \in \dot{U}_\rho(a)$ nach der Dreiecksungleichung
>
> $$|f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ so, dass $f - c$ abklingend an a ist, so heißt f **konvergent** an der Stelle a und c dann **Grenzwert** von f an der Stelle a. Man schreibt in diesem Fall kurz

$$f(x) \to c \qquad (x \to a).$$

Aus $a \in X'$ folgt, dass höchstens ein Grenzwert c von f an a existiert, denn ist c' ein weiterer, so ist $c' - c = (f(x) - c) - (f(x) - c')$ abklingend an a und damit $c = c'$. Wir schreiben im Falle der Existenz des Grenzwertes auch

$$\lim_{x \to a} f(x) := c\ .$$

Ist speziell $X \subset \mathbb{R}$ und nach oben unbeschränkt, so schreibt man

$$f(x) \to c \quad (x \to +\infty) \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) := c,$$

(oder kurz $x \to \infty$) falls $f|_{X \cap [0,\infty)}(x) \to c$ für $x \to \omega$ gilt. Entsprechend schreibt man in Fall nach unten unbeschränkter $X \subset \mathbb{R}$

$$f(x) \to c \quad (x \to -\infty) \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) := c,$$

falls $f|_{X \cap (-\infty,0]}(x) \to c$ für $x \to \omega$ gilt.

Bemerkung und Definition 3.6 Es sei $(x_n)_{n\in N}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir setzen im Weiteren stets voraus, dass $N \subset \mathbb{Z}$ nach unten beschränkt und unendlich ist. Im Falle $N = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$ schreiben wir auch $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ oder $(x_n)_{n\geq m}$ oder kurz (x_n), wenn m klar oder irrelevant ist.
Da Folgen in $\mathbb{C}$ spezielle $\mathbb{C}$-wertige Funktionen mit Definitionsbereich $N \subset \mathbb{K}$ sind, stehen die Begriffe von vorher zur Verfügung. Man betrachtet dabei stets Grenzwerte $n \to +\infty$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abklingend an $+\infty$, so spricht man auch von einer **Nullfolge**. Außerdem sagt man kurz (x_n) sei konvergent gegen c, wenn $(x_n) \to c$ für $n \to +\infty$ gilt. Wir schreiben dann auch

$$\lim x_n := \lim_{n\in N} x_n = c.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt **divergent**. Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) auch beschränkt.

Beispiel 3.7 Ist $f(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C}^*$, so ist f abklingend an ω. Insbesondere ist $(1/n)$ eine Nullfolge

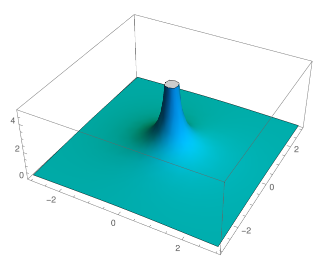


Abbildung 3: $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/|z|$.

Bemerkung und Definition 3.8 Für $q \in \mathbb{K}$ nennt man eine Folge der Form (q^n) **geometrische Folge**. Für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge.

> Denn: Ist $r := 1/|q| - 1$, so ist $|q| = 1/(1 + r)$, also nach der Bernoulli-Ungleichung $|q|^n \leq 1/(1 + rn) < r^{-1}/n$. Da $(1/n)$ eine Nullfolge ist, ist auch (q^n) abklingend.

Bemerkung 3.9 Es seien $f, g : X \to \mathbb{C}$ und f abklingend an a. Existiert ein $\rho > 0$ so, dass $g|_{\dot{U}_\rho(a)}$ beschränkt ist, so ist auch fg abklingend an a.

Denn: Es seien $R, \rho > 0$ so, dass $|g(x)| \leq R$ für alle $x \in \dot{U}_\rho(a)$, so ist $|f(x)g(x)| \leq R|f(x)|$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Daher ist auch fg abklingend an a.

Der folgende Satz zeigt, dass die Grenzwertbildung mit den algebraischen Operationen in $\mathbb{C}$ verträglich ist.

Satz 3.10 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f, g : X \to \mathbb{C}$. Weiter sei $a \in X'$ mit*

$$f(x) \to b \quad \textit{und} \quad g(x) \to c \quad (x \to a).$$

Dann gilt

1. *$(f \pm g)(x) \to b \pm c \ \ (x \to a)$.*
2. *$(f \cdot g)(x) \to b \cdot c \ \ (x \to a)$.*
3. *Ist g nullstellenfrei und ist $c \neq 0$, so folgt $(f/g)(x) \to b/c \ \ (x \to a)$.*

Beweis. 1. Mit $f - b$ und $g - c$ ist auch $f + g - (b + c)$ ablingend an a.
2. Zunächst existiert ein $\rho > 0$ mit $|g(x) - c| < 1$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$ und somit auch

$$|g(x)| = |g(x) - c + c| \leq 1 + |c|.$$

Damit ist g beschränkt auf $\dot{U}_\rho(a)$. Weiter ist

$$f(x)g(x) - bc = f(x)g(x) - bg(x) + bg(x) - bc = (f(x) - b)g(x) + b(g(x) - c).$$

Nach Bemerkung 3.9 ist die rechte Seite abklingend an a, also auch die linke.
3. Nach 2. reicht es, zu zeigen:

$$(1/g)(x) \to 1/c \qquad (x \to a).$$

Da $c \neq 0$ ist, existiert ein $\rho > 0$ mit $|g(x) - c| < |c|/2$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Also gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung ([Ü])

$$|g(x)| = |c + g(x) - c| \geq |c| - |g(x) - c| > |c| - |c|/2 = |c|/2 > 0$$

und damit $|1/g(x)| \leq 2/|c|$ für $x \in \dot{U}_\rho(a)$. Folglich ist $1/g$ beschränkt auf $\dot{U}_\rho(a)$. Nach Bemerkung 3.9 ist

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c} = \frac{1}{cg(x)}(c - g(x))$$

abklingend an a, also gilt $1/g(x) \to 1/c$ für $x \to a$. $\square$

Bemerkung 3.11 Sind $X \neq \varnothing$ eine Menge und $f, g : X \to \mathbb{R}$, so schreiben wir kurz $f \leq g$, falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Sind unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes f, g reellwertig und $f \leq g$, so gilt $b \leq c$ ([Ü]).

Bemerkung und Definition 3.12 Eine **Polynomfunktion** oder kurz **Polynom** ist eine Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = c_d z^d + c_{d-1} z^{d-1} + \cdots + c_0 = \sum_{k=0}^{d} c_k z^k$$

mit den **Koeffizienten** $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{C}$. Im Falle $c_d \neq 0$ nennt man $\deg(p) := d$ den **Grad** von p und $c_d z^d$ den **Führungsterm**. Polynome verhalten sich für große $|z|$ wie der Führungsterm, d. h.

$$\frac{p(z)}{c_d z^d} = 1 + \sum_{k=0}^{d-1} \frac{c_k}{c_d z^{d-k}} \to 1 \quad (z \to \omega). \tag{3.1}$$

Schießlich haben Polynome vom Grad $d \in \mathbb{N}$ höchstens d Nullstellen ([Ü]).
Sind $p, q \neq 0$ Polynome, so ist auch $p \cdot q$ ein Polynom, und zwar vom Grad $\deg(p) + \deg(q)$. Außerdem ist $\mathbb{C} \setminus Z(q)$ endlich. Funktionen der Form p/q heißen **rational**. Sind p vom Grad d und q vom Grad m mit Führungsterm $c_d z^d$ bzw. $b_m z^m$, so verhält sich p/q nach (3.1) für große $|z|$ wie der Quotient der Führungsterme, d. h.

$$\frac{(p/q)(z)}{(c_d/b_m) z^{d-m}} \to 1 \qquad (z \to \omega). \tag{3.2}$$

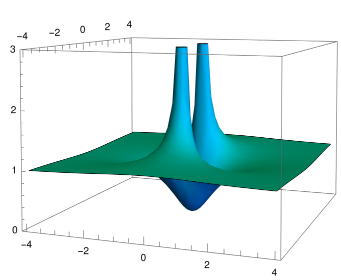


Abbildung 4: $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \ni z \mapsto |z^2/(1+z^2)|$.

Definition 3.13 Sind $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $f : X \to \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$f(x) \to +\infty \qquad (x \to a),$$

falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so existiert, dass $f(x) > 1/\varepsilon$ für alle $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Entsprechend schreiben wir $f(x) \to -\infty$ für $x \to a$, falls $-f(x) \to +\infty$ für $x \to a$ gilt.[27]

Beispiel 3.14 1. Es gilt $|z^d| = |z|^d \to +\infty$ für $z \to \omega$ und $1/|z|^d \to +\infty$ für $z \to 0$. Für beliebige Polynome p vom Grad $d > 0$ folgt auch (3.1) auch $|p(z)| \to +\infty$ für $z \to \omega$.

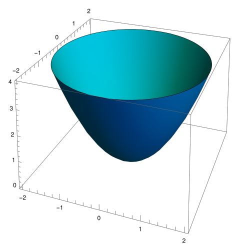


Abbildung 5: $z \mapsto |z^2| = z\overline{z}$.

Für reelle x gilt $x^d \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $x^d \to \pm\infty$ für $x \to -\infty$ je nach dem ob d gerade oder ungerade ist.
2. Ist $|q| > 1$ so gilt für die geometrische Folge (q^n) mit $r := |q| - 1 > 0$ nach der Bernoullischen Ungleichung $|q^n| = |q|^n = (1 + r)^n \geq 1 + rn > rn \to +\infty$ und damit auch $|q^n| \to +\infty$.

Definition 3.15 Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

- **wachsend**, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$,
- **streng wachsend**, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$,
- **fallend** beziehungsweise **streng fallend**, falls $-f$ wachsend beziehungsweise streng wachsend ist.

Ist f wachsend oder fallend, so sagen wir, f sei **monoton**.

[27]Man spricht dann auch von bestimmter Divergenz. Wir sprechen nicht vom Grenzwert $+\infty$.

Der folgende Satz zeigt, dass *monotone* Funktionen stets Grenzwerte an $\sup X$ und $\inf X$ besitzen. Der Beweis beruht wesentlich der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Wir schreiben für $f : X \to \mathbb{R}$ und $M \subset X$

$$\sup_M f := \sup_{x \in M} f(x) := \sup f(M) \qquad \text{und} \qquad \inf_M f := \inf_{x \in M} f(x) := \inf f(M).$$

Satz 3.16 *Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $a := \inf X$, $b := \sup X$.*[28] *Ist f wachsend, so gilt*

$$f(x) \to \sup_{X \setminus \{b\}} f \qquad (x \to b)$$

falls $b \in X'$ und

$$f(x) \to \inf_{X \setminus \{a\}} f \qquad (x \to a)$$

falls $a \in X'$. Ist f fallend, so gelten die entsprechenden Aussagen mit sup *statt* inf *und* inf *statt* sup.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Die weiteren ergeben sich in analoger Weise. Ist $f(X)$ nach oben beschränkt, so ist $c := \sup_{X \setminus \{b\}} f < +\infty$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $x < b$ mit $f(x) > c - \varepsilon$. Da f wachsend ist, gilt auch

$$c \geq f(x') \geq f(x) > c - \varepsilon$$

für alle x' mit $x < x' < b$. Ist $f(X)$ nach oben unbeschränkt, so ist $\sup_{X \setminus \{b\}} f = +\infty$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x < b$ mit $f(x) > 1/\varepsilon$. Wie vorher ist dann $f(x') \geq f(x) > 1/\varepsilon$ für alle x' mit $x < x' < b$. $\square$

Bemerkung 3.17 Als Spezialfall des Satzs 3.16 erhält man: Ist $(x_n)_{n \in N}$ eine wachsende Folge in $\mathbb{R}$, so gilt

$$x_n \to \sup_{n \in N} x_n$$

und ist $(x_n)_{n \in N}$ fallend , so gilt

$$x_n \to \inf_{n \in N} x_n.$$

Außerdem gilt folgende einfache und wichtige hinreichende Bedingung für die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$, der **Hauptsatz über monotone Folgen**: Ist $(x_n)_{n \in N}$ beschränkt und monoton, so ist $(x_n)_{n \in N}$ konvergent.

[28] $a = -\infty$ und $b = +\infty$ sind zugelassen.

Bemerkung und Definition 3.18 Die Folge $x_n := (1+1/n)^n$ ist wachsend, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Bernoulli-Ungleichung

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n-1} = \Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^n \frac{n}{n-1} \geq \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{n}{n-1} = 1.$$

Ähnlich kann man zeigen, dass die Folge $y_n := (1+1/n)^{n+1}$ fallend ist (Ü]). Nach den Hauptsatz über monotone Folgen sind wegen $2 = x_1 \leq x_n < y_n \leq y_1 = 4$ beide Folgen konvergent und wegen $x_n/y_n = 1 + 1/n \to 1$ gilt $2 \leq \lim x_n = \lim y_n \leq 4$. Man definiert die **Eulersche Zahl** e als den gemeinsamen Grenzwert, also

$$\mathrm{e} := \lim\,(1+1/n)^n.$$

Ist (x_n) eine konvergente Folge, so ist (x_n) beschränkt. Wir betrachten nun allgemeine beschränkte Folgen.

Bemerkung und Definition 3.19 Es sei $(x_n)_{n\in N}$ ein beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Ist

$$b_n := \sup_{j\geq n} x_j \qquad (n \in N),$$

so ist (b_n) fallend mit $b_n \geq \inf_{n\in N} x_n$, also konvergent nach dem Hauptsatz über monotone Folgen gegen $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Den Grenzwert bezeichnet man auch als $\limsup x_n$.[29]

Beispiel 3.20 Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := (-1)^n(1+1/n)$ ist beschränkt (wegen $|x_n| \leq 2$). Hier ist $b_n = 1 + 1/n$ für gerade n und $1 + 1/(n+1)$ für ungerade. Es gilt also $b_n \to 1$ und damit $\limsup x_n = 1$.

Definition 3.21 Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und ist $J \subset N$ unendlich, so nennt man $(x_n)_{n\in J}$ eine **Teilfolge** von $(x_n)_{n\in N}$. Ist $(x_n)_{n\in J}$ konvergent mit Grenzwert c, so schreiben wir $x_n \to c$ für $n \in J$. Aus der Definition ergibt sich auch sofort: Ist eine Folge konvergent, so ist auch jede Teilfolge konvergent, und zwar mit gleichem Grenzwert. Die Folge (x_n) aus Beispiel 3.20 ist divergent, hat aber die konvergenten Teilfolgen $(x_n)_{n\in J}$ und $(x_n)_{n\in I}$, wobei J die geraden und I die ungeraden Zahlen bezeichnet, mit Grenzwert 1 im ersten und -1 in zweiten Fall.

[29]Entsprechend bezeichnet man den Grenzwert der (wachsenden und beschränkten) Folge $a_n := \inf_{j\geq n} x_j$ als $\liminf x_n$.

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung für die Analysis.

Satz 3.22 (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1. Es sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass eine Teilfolge gegen $c := \limsup x_n$ konvergiert. Dazu setzen wir $n_0 := \min N$ und definieren eine Folge $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ in N induktiv: Sind $n_0, \ldots, n_k$ definiert, so existiert ein $m > n_k$ mit $c \leq b_m < c + 1/k$ (wobei b_m wie in Bemerkung und Definition 3.19). Aufgrund der Definition von b_m existiert weiter ein $N \ni j \geq m$ mit $b_m - 1/k < x_j \leq b_m$. Mit $n_{k+1} := j$ gilt dann

$$c - 1/k < x_{n_{k+1}} < c + 1/k\,.$$

Ist $J := \{n_k : k \in \mathbb{N}_0\}$, so gilt $x_n \to c$ für $n \in J$.
2. Es sei $(z_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_n = (s_n, t_n)$. Dann sind die Folgen $(s_n)_{n\in N}$ und $(t_n)_{n\in N}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt (es gilt $|s_n| \leq |z_n|$ und $|t_n| \leq |z_n|$). Nach 1. existieren eine Teilfolge $(s_n)_{n\in I}$ von $(s_n)_{n\in N}$ und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $s_n \to b$ für $n \in I$. Wieder nach 1. existieren auch eine Teilfolge $(t_n)_{n\in J}$ von $(t_n)_{n\in I}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $t_n \to c$ für $n \in J$. Mit Satz 3.10 folgt $z_n = s_n + t_n\mathrm{i} \to b + c\mathrm{i}$ für $n \in J$. □

Bemerkung und Definition 3.23 Es sei $X \subset \mathbb{K}$.
1. X heißt **kompakt**[30], falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in X besitzt. Jede kompakte Menge ist beschränkt (sonst würde eine Folge (x_n) in X mit $|x_n| \to +\infty$ existieren, die aber keine konvergente Teilfolge hat).
2. X heißt **abgeschlossen**, falls jeder Häufungspunkt zu X gehört, also $X' \setminus \{\omega\} \subset X$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede konvergente Folge in X der Grenzwert in X liegt ([Ü]). Mit Bemerkung 3.11 sieht man, dass insbesondere etwa Intervalle der Form $[a, b]$, $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ und Kreisscheiben

$$B_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |x - a| \leq \rho\},$$

wobei $\rho \geq 0$ und $a \in \mathbb{K}$, abgeschlossen sind.

[30] genauer eigentlich folgenkompakt

Satz 3.24 (Heine-Borel)
$X \subset \mathbb{K}$ ist genau dann kompakt, wenn X beschränkt und abgeschlossen ist.[31]

Beweis. Ist X kompakt, so ist X beschränkt nach Bemerkung und Definition 3.23, und für jede Folge in X, die konvergiert, liegt der Grenzwert in X (da dies für eine Teilfolge gilt). Ist umgekehrt X beschränkt und abgeschlossen, so hat nach den Satz von Bolzano-Weierstraß jede Folge in X eine konvergente Teilfolge und aufgrund der Abgeschlossenheit liegt jeder Grenzwert einer in X konvergenten Folge in X. □

Bemerkung und Definition 3.25 $X \subset \mathbb{K}$ und ist $f : X \to \mathbb{C}$ und $a \in X' \cap X$, so heißt f **stetig an der Stelle** a, falls $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$ gilt. Weiter heißt f kurz **stetig**, falls f stetig an jedem $a \in X' \cap X$ ist. Mit $C(X)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$.
Konstante Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und die identische Abbildung $f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ sind stetig. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$ ist nicht stetig an der Stelle 0, aber stetig an allen $a \neq 0$.

Bemerkung 3.26 Aus Satz 3.10 erhält man: Ist $X \subset \mathbb{K}$ und sind f, g stetig an $a \in X$, so sind $f \pm g$, $f \cdot g$ und für nullstellenfreies g auch f/g stetig an der Stelle a. In Verbindung mit Bemerkung und Definition 3.25 sieht man, dass Polynome und rationale Funktionen stetig sind.

Satz 3.27 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$, $a \in X'$ und $f : X \to \mathbb{C}$ mit $f(x) \to c$ für $x \to a$. Weiter seien $U \subset \mathbb{K}$, $v \in U'$ und $\varphi : U \to X$ mit $\varphi(u) \to a$ für $u \to v$.*

1. *Ist $a \notin \varphi(U)$, so gilt $(f \circ \varphi)(u) \to c$ für $u \to v$.*
2. *Ist $a \in \varphi(U)$ und ist f stetig an a, so gilt $(f \circ \varphi)(u) \to f(a)$ für $u \to v$.*

Beweis. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\eta > 0$ mit

$$|f(x) - c| < \varepsilon \qquad (x \in \dot{U}_\eta(a)). \tag{3.3}$$

[31] Äquivalent ist übrigens auch $X' \subset X$.

Weiter existiert ein $\delta > 0$ so, dass $\varphi(u) \in U_\eta(a)$ für $u \in \dot{U}_\delta(v)$. Ist $a \notin \varphi(U)$, so ergibt sich $|f(\varphi(u)) - c| < \varepsilon$ für $u \in \dot{U}_\delta(v)$. Ist f stetig an a, so ist (3.3) mit $c = f(a)$ und für $x = a$ erfüllt, also $|f(\varphi(u)) - f(a)| < \varepsilon$ für $u \in \dot{U}_\delta(v)$. □

Bemerkung 3.28 Insbesondere ergibt sich aus Satz 3.27, dass die Komposition $f \circ \varphi$ stetiger Funktionen $\varphi : U \to X$ und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig ist. Falls f stetig an a oder $a \notin \varphi(U)$ ist, ergibt sich durch Anwendung auf Folgen $\varphi = (x_n)_{n \in N}$, dass mit $f(x) \to c$ für $x \to a$ auch $f(x_n) \to c$ für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to a$ gilt. Damit impliziert Stetigkeit von f an einer Stelle a Folgenstetigkeit an a, d. h. $f(x_n) \to f(a)$ für alle (x_n) mit $x_n \to a$. Umgekehrt folgt aus Folgenstetigkeit schon Stetigkeit an a.

> Denn: Angenommen. f ist nicht stetig an a. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ und $|x_n - a| < 1/n$. Für die so gefundene Folge (x_n) gilt $x_n \to a$, aber die Folge $(f(x_n))$ konvergiert nicht gegen $f(a)$.

Ein hohes Gut sind Aussagen über Bildmengen stetiger Funktionen.

Satz 3.29 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $f(X)$ ebenfalls kompakt.*

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $f(X)$. Wir wählen $x_n \in X$ mit $y_n = f(x_n)$. Da X kompakt ist, existieren ein $a \in X$ und eine Teilfolge $(x_n)_{n \in I}$ von (x_n) mit $x_n \to a$ für $n \in I$. Da f stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \to f(a) \in f(X)$ für $n \in I$. □

Wir betrachten reellwertige Funktionen und kommen zu einer weiteren Aussage über Bildmengen, die die Lösbarkeit von Gleichungen in $\mathbb{R}$ nach sich zieht. Für kompakte und nichtleere $X \subset \mathbb{R}$ ist wegen $\sup X \subset X \cup X'$ und $\inf X \subset X \cup X'$ ([Ü]) stets

$$\sup X = \max X \qquad \text{und} \qquad \inf X = \min X. \tag{3.4}$$

Satz 3.30 (Zwischenwertsatz)
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $W(f) = f(I)$ ein Intervall, d. h. zu jedem $y \in \mathbb{R}$ mit $\inf_I f < y < \sup_I f$ existiert ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = y$.

Beweis. Zunächst existieren nach Definition des Supremums und des Infimums $u, v \in f(I)$ mit $u < y < v$. Wir wählen $a, b \in I$ mit $f(a) = u$ und $f(b) = v$, wobei wir ohne Einschränkung $a < b$ annehmen. Da I ein Intervall ist, ist $[a, b] \subset I$. Wir setzen

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y\} \subset [a, b) \ .$$

Dann ist $M \neq \varnothing$ beschränkt und wegen der Folgenstetigkeit von f nach Bemerkung 3.11 auch abgeschlossen (also kompakt). Nach (3.4) ist

$$\xi := \sup M = \max M,$$

also $f(\xi) \leq y$. Andererseits gilt wegen $\xi < b$ und der Stetigkeit von f auch $f|_{(\xi,b]}(x) \to f(\xi)$ für $x \to \xi$ und mit $f(x) > y$ für $x \in (\xi, b]$ daher auch $f(\xi) \geq y$, wieder mit Bemerkung 3.11. Also ist $f(\xi) = y$. □

Satz 3.31 (k-te Wurzeln)
Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(x) = x^k$ bijektiv. Man schreibt $\sqrt[k]{y} := f^{-1}(y)$ für $y \geq 0$.

Beweis. Mit $I := [0, \infty)$ gilt $0 = f(0) \in f(I)$ und aus $f(x) = x^k \to +\infty$ für $x \to +\infty$ folgt $\sup_I f = \infty$. Da f stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz zu jedem $y \geq 0$ ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = y$. Nach Satz 2.3 ist f zudem injektiv und damit bijektiv. □

Streng wachsende (bzw. fallende) Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ sind bijektive Abbildungen $f : X \to W(f)$ und $f^{-1} : W(f) \to X$ ist ebenfalls streng wachsend (bzw. fallend). Obwohl solche f im Allgemeinen nicht stetig sind, gilt

Satz 3.32 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng wachsend. Dann ist $f^{-1} : W(f) \to I$ stetig.*[32]

Beweis. Es seien $u \in W(f) \cap W(f)'$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $t := f^{-1}(u)$. Ist $t \neq \sup I$, so existiert ein $h = h_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ mit $t + h \in I$. Mit

$$\delta^+ := \delta^+_\varepsilon := f(t + h) - u > 0$$

[32] eine entsprechende Aussage gilt natürlich für fallende f.

gilt für alle $v \in J$ mit $u \le v < u + \delta^+ = f(t+h)$

$$0 \le f^{-1}(v) - f^{-1}(u) < f^{-1}(u+\delta^+) - f^{-1}(u) = t + h - t = h < \varepsilon\ .$$

Ist $t \neq \inf I$, so sieht man entsprechend: Es existiert ein $\delta^- > 0$ so, dass

$$0 \le f^{-1}(u) - f^{-1}(v) < \varepsilon$$

für alle $v \in J$ mit $u - \delta^- < v \le u$. Damit ergibt sich $|f^{-1}(v) - f^{-1}(u)| < \varepsilon$ für alle $v \in J$ mit $|v - u| < \delta := \min\{\delta^+, \delta^-\}$. $\square$

Bemerkung 3.33 Aus Satz 3.32 folgt, dass die Funktion $[0,\infty) \ni x \mapsto \sqrt[k]{x}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ stetig ist. Allgemeiner ergibt sich: Ist I ein Intervall und ist $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig, so ist nach dem Zwischenwertsatz $J := W(f)$ ein Intervall und f streng wachsend oder fallend ([Ü]). Nach Satz 3.32 ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ stetig (und ebenfalls streng wachsend oder fallend).

Definition 3.34 Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$. Man sagt, f wird **maximal** oder f hat ein **globales Maximum**, falls

$$\max_X f := \max_{x \in X} f(x) := \max f(X)$$

existiert, d. h. falls ein $a \in X$ existiert mit $f(a) \ge f(x)$ für alle $x \in X$. Dann sagt man auch, dass f an a maximal wird oder dass f an a das Maximum annimmt. Entsprechend sagt man, f wird **minimal** oder f hat ein **globales Minimum**, falls

$$\min_X f := \min_{x \in X} f(x) := \min f(X)$$

existiert, d. h. falls ein $a \in X$ existiert mit $f(a) \le f(x)$ für alle $x \in X$. Dann sagt man auch, dass f an a minimal wird oder dass f an a das Minimum annimmt.
Ist $M \subset X$, so sagt man, dass f **maximal auf** M wird, falls $f|_M$ maximal wird und dass f **minimal auf** M wird, falls $f|_M$ minimal wird.

Beispiel 3.35 Die stetige Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto z\overline{z}$ (siehe Abbildung 3.14) wird an 0 minimal aber nicht maximal. Die beschränkte und stetige Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1/(1+x^2)$ wird maximal an 0, aber nicht minimal und $\mathbb{R} \ni x \mapsto x/(1+|x|)$ ist ebenfalls beschränkt und stetig, wird aber weder maximal noch minimal

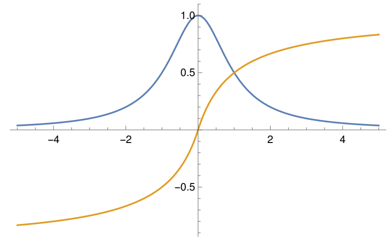


Abbildung 6: $x \mapsto x/(1+|x|)$, $x \mapsto 1/(1+x^2)$.

Mit Satz 3.29 und (3.4) erhält man

Satz 3.36 *Es seien $X \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird f sowohl maximal als auch minimal.*

Bemerkung und Definition 3.37 Ist $X \subset \mathbb{K}$ und ist $f : X \to \mathbb{C}$, so heißt f **gleichmäßig stetig**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für $|x - x'| < \delta$. Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig, es gibt aber stetige Funktionen, die nicht gleichmäßig stetig sind, wie etwa $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$ oder $(0,1] \ni x \mapsto 1/x$.

Satz 3.38 *Ist $X \subset \mathbb{K}$ kompakt und ist $f : X \to \mathbb{C}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, x'_n \in X$ existieren mit $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ und $|x_n - x'_n| < 1/n$. Die Folge (x_n) hat eine konvergente Teilfolge $(x_n)_{n\in I}$ mit Grenzwert $c \in X$. Wegen $|x_n - c| \leq |x_n - x'_n| + |x'_n - c| < 1/n + |x'_n - c|$ konvergiert auch $(x'_n)_{n\in I}$ gegen c. Da f (folgen-)stetig ist, erhält man die widersprüchliche Aussage

$$\varepsilon \leq |f(x'_n) - f(x_n)| \leq |f(x'_n) - f(c)| + |f(c) - f(x_n)| \to 0$$

für $n \in I$. $\square$

4 Reihen und elementare Funktionen

Bemerkung und Definition 4.1 Es sei $(a_k)_{k\geq m}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Für $n \geq m$ heißt

$$s_n := \sum_{k=m}^{n} a_k =: a_m + \cdots + a_n$$

die n-te **Partialsumme** oder **Teilsumme** der Folge (a_k). Die Folge $(s_n)_{n\geq m}$ nennt man die mit der Folge (a_k) gebildete **Reihe**.[33] Die a_k heißen dann **Reihenglieder**. Ist die Folge (s_n) konvergent, so heißt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ der **Reihenwert** und man schreibt

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Traditionell wird neben dem Reihenwert auch die Teilsummenfolge (s_n) mit $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Das ist ganz praktisch, weil man dann kurz von Konvergenz oder Divergenz von $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ sprechen kann.[34]

Ist $n > m$, so ist $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert, und in diesem Fall ist

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=m}^{\infty} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_k.$$

Für Konvergenzuntersuchungen ist es also unwichtig, wie die untere Summationsgrenze aussieht. Außerdem folgt daraus, dass im Falle der Konvergenz die Reihenreste $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ eine Nullfolge bilden. Durch Anwendung von Satz 3.10 ergibt sich zudem: Sind $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=m}^{\infty} b_k$ konvergent und $\lambda \in \mathbb{K}$, so sind auch $\sum\limits_{k=m}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \lambda a_k$ konvergent mit

$$\sum_{k=m}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

[33] In der Schule und in vielen Foren spricht man auch von Zahlen*reihen*, wenn man Zahlen*folgen* meint. Bitte lassen Sie sich dadurch nicht verwirren. Die Folge (a_k) ist etwas ganz anderes als die Folge (s_n).

[34] Man beachte aber, dass das Symbol $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ damit zwei Bedeutungen hat: Erstens steht es für die Folge (s_n) der Teilsummen und zweitens (im Falle der Konvergenz) für ihren Grenzwert.

Bemerkung 4.2 Eine *notwendige* Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, denn mit $s_n := \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ und $s := \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ gilt

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0.$$

Wir betrachten daher im Weiteren nur noch Nullfolgen (a_k) in $\mathbb{K}$.

Bemerkung und Definition 4.3 Für $|q| < 1$ heißt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ eine **geometrische Reihe**. Wegen $q^{n+1} \to 0$ gilt nach der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{1}{1 - q}\,.$$

Also ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}\,.$$

Für $q = 1/2$ ergibt sich $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 1/2^k = 2$ und damit auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$. Abbildung 7 veranschaulicht die letzte Reihe als Grenzwert der Teilsummenfolge in Form von Rechteckflächen. Die grau unterlegte Fläche entspricht der Teilsumme s_5.[35]

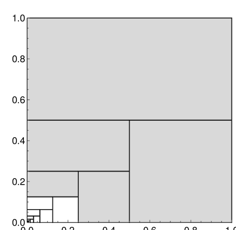


Abbildung 7: s_5.

[35]Das bekannte Paradoxon von Achilles und der Schildkröte deutet auf die Problematik, dass ein endliches Zeitintervall in unendlich viele Zeitintervalle zerlegt werden kann; siehe https://www.geogebra.org/m/zqnwhppe

Bemerkung und Definition 4.4 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ nennt man **harmonische Reihe**. Wegen

$$t_j := \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} 1/k \geq 2^{j-1}/2^j = 1/2$$

gilt $s_{2^m} = \sum_{k=1}^{2^m} 1/k = 1 + \sum_{j=1}^{m} t_j \geq 1 + m/2 \to \infty$. Also ist (s_n) unbeschränkt, d. h die harmonische Reihe ist divergent. Insbesondere gibt es also Nullfolgen, für die die entsprechende Reihe divergiert.

Wir betrachten Nullfolgen in $\mathbb{R}$, die abwechselndes Vorzeichen haben.

Satz 4.5 (Leibniz-Kriterium) *Es seien $(b_k)_{k\geq 0}$ eine fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen und $a_k := (-1)^k b_k$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent mit fallender Teilfolge $(s_n)_{n\in 2\mathbb{N}_0}$* [36] *der Partialsummen und wachsender Teilfolge $(s_n)_{n\in 2\mathbb{N}_0+1}$.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst die Monotonieaussagen: Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) \geq 0$$

und damit auch $s_{n+1} = s_n + b_{n+1} \geq 0$. Weiter gilt für $n \geq 2$

$$s_n - s_{n-2} = (-1)^{n-1}(b_{n-1} - b_n) \begin{cases} \leq 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \geq 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Damit ist $(s_n)_{n\in 2\mathbb{N}_0}$ fallend und $(s_n)_{n\in 2\mathbb{N}_0+1}$ wachsend.
2. Nach 1. und dem Hauptsatz über monotone Folgen existiert ein $s \in [0, \infty)$ mit $s_n \to s$ für $n \in 2\mathbb{N}$. Dann gilt auch $s_{n+1} = s_n - b_{n+1} \to s$ für $n \in 2\mathbb{N}$. Zusammen ergibt sich $s_n \to s$. □

Bemerkung und Definition 4.6 Nach Satz 4.5 ist die **alternierende harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ konvergent, während die harmonische Reihe nach Bemerkung 4.4 divergent ist.

[36] Für eine Teilmenge M eines Rings R und $a, b \in R$ schreiben wir $aM + c := \{ax + b : x \in M\}$.

Von fundamentaler Bedeutung für die Analysis ist

Satz 4.7 *Es sei* $(a_k)_{k\geq m}$ *eine Nullfolge. Ist* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} |a_k|$ *konvergent, so ist auch* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ *konvergent und es gilt*

$$\Big|\sum_{k=m}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k|. \tag{4.1}$$

Beweis. Zunächst gilt für die Teilsummen s_n mit der Dreiecksungleichung

$$|s_n| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist (s_n) beschränkt und es gilt (4.1) wenn die Konvergenz nachgewiesen ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existieren ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Teilfolge $(s_n)_{n\in I}$ mit $s_n \to s$ für $n \in I$. Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da Reihenreste eine Nullfolge bilden (Bemerkung und Definition 4.1), existiert ein $R > 0$ mit $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$ für $n > R$. Wählt man $N \in I$ mit $|s - s_N| < \varepsilon$ und $N \geq R$, so erhält man für $n \geq N$

$$|s - s_n| \leq |s - s_N| + |s_n - s_N| \leq |s - s_N| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon.$$

Also gilt $s_n \to s$. □

Reihen für die $\sum\limits_{k=m}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, nennt man auch absolut konvergent. Wir betrachten nun Reihen mit nichtnegativen Gliedern.

Bemerkung und Definition 4.8 (**Majorantenkriterium**) Ist $(a_k)_{k\geq m}$ eine Folge in $[0, \infty)$, so ist die Teilsummenfolge (s_n) wachsend. Damit ist entweder (s_n) beschränkt und dann konvergent nach dem Hauptsatz über monotone Folgen mit

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n < \infty$$

oder (s_n) unbeschränkt mit $s_n \to \infty$. Man schreibt im zweiten Fall auch

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \infty.$$

Ist $(b_k)_{k\geq N}$ eine weitere Folge so, dass $a_k \leq b_k$ für $k \geq N$, so nennt man $\sum\limits_{k=N}^{\infty} b_k$ eine **Majorante** von $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$. Ist $\sum\limits_{k=N}^{\infty} b_k < \infty$, so ist auch $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k < \infty$, denn aus

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n} b_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k \qquad (n \geq N)$$

folgt die Beschränktheit der Teilsummen $s_n = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m}^{N-1} a_k + \sum\limits_{k=N}^{n} a_k$.

Bemerkung 4.9 Mit Beispiel 1.19 ergibt sich

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = 1.$$

Ist $1 < d \in \mathbb{N}$, so gilt $k^d \geq k^2 \geq (k-1)k$ für $k \geq 2$. Nach dem Majorantenkriterium gilt daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^d} < \infty.$$

Bemerkung 4.10 (Quotientenkriterium) Es sei $(a_k)_{k\geq m}$ eine Nullfolge nichtnegativer Zahlen. Existieren ein $q < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_k > 0$ und $a_{k+1}/a_k \leq q$ für $k \geq N$, so ist $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k < \infty$.

Denn: Induktiv ergibt sich $a_k \leq q^{k-N} a_N = a_N q^{-N} q^k$ für $k \geq N$. Wegen $\sum\limits_{k=N}^{\infty} q^k < \infty$ folgt die Behauptung aus dem Majoratenkriterium.

Bemerkung und Definition 4.11 Es seien $c_k := 1/k!$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}^*$. Wegen

$$\frac{c_{k+1}|z|^{k+1}}{c_k|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \to 0$$

ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |z|^k/k!$ nach dem Quotientenkriterium konvergent. Nach Satz 4.7 ist damit auch die Reihe ohne Betrag konvergent. Dies gilt natürlich auch für $z = 0$. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{C}) \, ,$$

heißt **Exponentialfunktion**. Nach Definition ist $\exp(0) = 1$ und zudem $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Wir wollen Eigenschaften der Exponentialfunktion herleiten, die von fundamentaler Bedeutung für die Mathematik sind.

Satz 4.12 *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)\,.$$

Beweis. Wir setzen $s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} z^z/k!$ für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es reicht zu zeigen: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $s_n(z)s_n(w) - s_n(z+w) \to 0$. Mit dem binomischen Satz ist

$$\begin{aligned} s_n(z)s_n(w) &= \sum_{k,j\le n} \frac{z^k w^j}{k!j!} = \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k+j=m} \frac{z^k w^j}{k!j!} + \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k w^{m-k}}{k!(m-k)!} \\ &= \sum_{m=0}^{2n} \frac{1}{m!}(z+w)^m = s_n(z+w) + \sum_{m=n+1}^{2n} \frac{1}{m!}(z+w)^m, \end{aligned}$$

also

$$|s_n(z)s_n(w) - s_n(z+w)| \le \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!}(|z|+|w|)^m\,.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{m=0}^{\infty} (|z|+|w|)^m/m!$ ist die rechte Seite nach Bemerkung und Definition 4.1 eine Nullfolge. Damit gilt $s_n(z)s_n(w) - s_n(z+w) \to 0$. $\square$

Bemerkung 4.13 Wegen

$$1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z) \cdot \exp(-z)$$

gilt

$$\exp(-z) = 1/\exp(z)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\exp(z) \neq 0$. Induktiv ergibt sich aus Satz 4.12 damit auch

$$\exp(mz) = (\exp(z))^m \qquad (m \in \mathbb{Z}). \tag{4.2}$$

Für $0 < |z| \le 1$ gilt weiterhin

$$\left|\frac{\exp(z)-1}{z} - 1\right| = \left|\frac{1}{z}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\right| \le |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{(k+2)!} \le |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \to 0 \quad (z \to 0).$$

also

$$(\exp(z) - 1)/z \to 1 \qquad (z \to 0). \tag{4.3}$$

Insbesondere ist exp stetig an 0. Für allgemeines $a \in \mathbb{C}$ gilt damit

$$\exp(z) = \exp(a) \cdot \exp(z - a) \to \exp(a) \quad (z \to a)$$

Damit ist exp stetig. Wegen $\exp(|z|) \geq |z|^{d+1}/(d+1)!$ gilt schließlich für beliebige Polynome p mit (3.1)

$$p(z)/\exp(|z|) \to 0 \qquad (z \to \omega), \tag{4.4}$$

d. h. $\exp(|z|)$ wächst für $|z| \to \infty$ schneller als jedes Polynom.

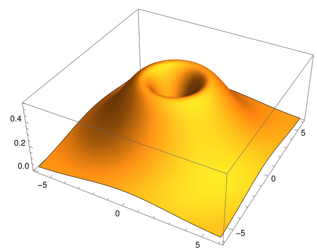


Abbildung 8: $z \mapsto |z^2|/\exp(|z|)$.

Bemerkung und Definition 4.14 Wir betrachten die reelle Exponentialfunktion, also $\exp|_{\mathbb{R}}$. Für $t > s$ gilt

$$\exp(t)/\exp(s) = \exp(t - s) \geq 1 + (t - s) > 1$$

und damit $\exp(t) > \exp(s)$. Also ist exp streng wachsend auf $\mathbb{R}$. Aus (4.4) folgt $\exp(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ und dann $\exp(t) = 1/\exp(-t) \to 0$ für $t \to -\infty$. Aus dem Zwischenwertsatz ergibt sich

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

und nach Satz 3.32 existiert die Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathbb{R}}$ auf $(0, \infty)$ und ist dort stetig und streng wachsend. Diese Funktion nennt man die (natürliche) **Logarithmusfunktion** und schreibt dafür ln oder auch log. Aus Satz 4.12 folgt

$$\ln(st) = \ln(s) + \ln(t) \qquad (s, t > 0)$$

und aus (4.2)

$$\ln(t^m) = m\ln(t) \qquad (m \in \mathbb{Z},\ t > 0).$$

Mit (4.3) erhält man

$$\frac{1}{n\ln(1+1/n)} = \frac{\exp(\ln(1+1/n)))-1}{\ln(1+1/n)} \to 1,$$

also auch $\ln((1+1/n)^n) \to 1$. Wegen der Stetigkeit von ln ist damit $\ln(\mathrm{e}) = 1$ bzw. $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Definition 4.15 Nach (4.2) gilt für $a > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$

$$a^m = (\exp(\ln a))^m = \exp(m \cdot \ln a).$$

Man definiert für allgemeines $z \in \mathbb{C}$

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a)\ .$$

Insbesondere ist $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.

Satz 4.16 (allgemeine Potenzgesetze)
Es seien $a, b > 0$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt $a^z a^w = a^{z+w}$ sowie $a^z b^z = (ab)^z$ und insbesondere $a^{-z} = 1/a^z$. Außerden gilt $(a^c)^z = a^{cz}$ für $c \in \mathbb{R}$ und insbesondere $\sqrt[k]{a} = a^{1/k}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es gilt

$$a^z a^w = \mathrm{e}^{z\ln a}\mathrm{e}^{w\ln a} = \mathrm{e}^{z\ln a + w\ln a} = \mathrm{e}^{(z+w)\ln a} = a^{z+w}$$

und

$$a^z b^z = \mathrm{e}^{z\ln a}\mathrm{e}^{z\ln b} = \mathrm{e}^{z(\ln a+\ln b)} = \mathrm{e}^{z\ln(ab)} = (ab)^z.$$

Insbesondere ist $a^{-z}a^z = a^0 = 1$ und damit $a^{-z} = 1/a^z$.
Für $c \in \mathbb{R}$ ist weiter $a^c = \mathrm{e}^{c\ln a} > 0$ und damit $(a^c)^z = \mathrm{e}^{z\ln(\mathrm{e}^{c\ln a})} = \mathrm{e}^{cz\ln a} = a^{cz}$. Insbesondere ist $(a^{1/k})^k = a$ und damit $\sqrt[k]{a} = a^{1/k}$. □

Bemerkung und Definition 4.17 Die Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\cos z := \cos(z) := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \qquad (z \in \mathbb{C}) \ ,$$

heißt **Kosinusfunktion** und die Funktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\sin z := \sin(z) := \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \qquad (z \in \mathbb{C}) \ ,$$

Sinusfunktion. Damit gilt die **Eulersche Formel**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\, \sin z. \tag{4.5}$$

Aus der Stetigkeit von exp ergibt sich unmittelbar die Stetigkeit von cos und sin. Weiter folgt aus der jeweiligen Definition sofort $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ und

$$\cos(-z) = \cos z, \qquad \sin(-z) = -\sin z. \tag{4.6}$$

Satz 4.18 (Additionstheoreme) *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

und

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

sowie

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Beweis. Wegen

$$(u + 1/u)(v + 1/v) + (u - 1/u)(v - 1/v) = 2(uv + 1/(uv))$$

für $u, v \in \mathbb{C}^*$ ergibt sich mit $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ und $v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) = 2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)}).$$

Nach Division durch 4 ergibt ich die erste Aussage. Die zweite erhält man entsprechend mit $(u-1/u)(v+1/v)+(u+1/u)(v-1/v) = 2(uv-1/(uv))$. Setzt man speziell $w = -z$ in der ersten, so ergibt sich $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ mit (4.6). □

Bemerkung 4.19 Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$ ([Ü]). Ist speziell $t \in \mathbb{R}$, so ergibt sich damit wegen $\overline{\mathrm{i}t} = -\mathrm{i}t$

$$\cos t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in \mathbb{R}, \qquad \sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in \mathbb{R}\,.$$

Folglich ist

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = (\cos^2 t + \sin^2 t)^{1/2} = 1,$$

d. h. $\exp(\mathrm{i}\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}$ und damit auch $|\mathrm{e}^z| = |e^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = \mathrm{e}^s$ für $z = (s,t) \in \mathbb{C}$.

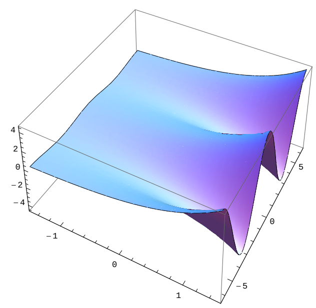


Abbildung 9: $s + \mathrm{i}t \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{s+\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^s \cos t$

Abbildung 9 zeigt den Realteil der komplexen Exponentialfunktion. Das Schwingungsverhalten der reellen Kosinusfunktion spiegelt sich wider im Verhalten des Realteils der Exponentialfunktion entlang der imaginären Achse.

Bemerkung 4.20 Man kann zeigen ([Ü]): Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}\,.$$

Für $t \in (0, \sqrt{6})$ gilt damit $0 < t(1 - t^2/6) \le \sin t \le t$.

Denn: Wir setzen $b_k := t^{2k+1}/(2k+1)!$. Wegen

$$b_k / b_{k-1} = t^2/(2k(2k+1)) \le t^2/6 < 1$$

für $k \in \mathbb{N}$ ist (b_k) fallend. Also folgt aus Satz 4.5

$$0 < t(1 - t^2/6) = s_1 \le \sin t \le s_0 = t.$$

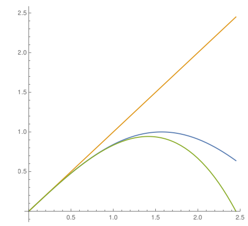


Abbildung 10: $t \mapsto \sin t$ (blau), $t \mapsto t$ und $t \mapsto t(1 - t^2/6)$.

Wir nutzen nun den Zwischenwertsatz und damit einmal mehr die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, um die Kreiszahl π zu definieren. Dazu beweisen wir

Satz 4.21 *Es existiert ein* $\xi \in (0, 2)$ *mit* $e^{i\xi} = i$, *also* $\cos(\xi) = 0$ *und* $\sin(\xi) = 1$.

Beweis. Nach Bemerkung 4.20 ist $\sin 1 \geq 5/6 > 1/\sqrt{2}$. Also ist

$$|\cos 1| = \sqrt{1 - \sin^2 1} < 1/\sqrt{2}.$$

Da cos stetig ist mit $\cos(0) = 1$, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\tau \in (0, 1)$ mit $\cos \tau = 1/\sqrt{2}$. Damit ist wegen $\sin \tau \geq 0$ auch $\sin \tau = 1/\sqrt{2}$, also für $\xi := 2\tau$

$$e^{i\xi} = (e^{i\tau})^2 = (\cos \tau + i \sin \tau)^2 = (1 + i)^2/2 = i\,.$$

$\square$

Bemerkung und Definition 4.22 Wir definieren die **Kreiszahl** π als

$$\pi := 2 \inf\{\xi > 0 : \cos(\xi) = 0\} < 4.$$

Da cos stetig ist mit $\cos(0) = 1$ gilt $\pi > 0$ und

$$\cos(\pi/2) = 0\,.$$

Nach dem Zwischenwertsatz sowie $\cos t = \cos(-t)$ ist $\cos t > 0$ für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aus $1 = \sin^2(\pi/2)$ und $\sin(\pi/2) > 0$ ergibt sich $\sin(\pi/2) = 1$ und damit

$$e^{i\pi/2} = i,$$

also auch $-1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = \cos\pi$ [37] und $1 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \cos(2\pi)$. Nach dem Zwischenwertsatz ist

$$\cos([0,\pi]) = [-1,1]$$

und wegen $\sin(-\pi/2) = -1$ auch

$$\sin([-\pi/2,\pi/2]) = [-1,1].$$

Schließlich ist damit

$$\exp(\mathrm{i}(-\pi,\pi]) = \mathbb{S}.$$

> Denn: Es sei $w = (u,v) = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{S}$. Dann existiert ein $t \in [0,\pi]$ mit $u = \cos t$. Daher ist $v^2 = 1 - u^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$. Im Fall $v \geq 0$ ist $v = \sin t$ und in Fall $v < 0$ ist $v = \sin(-t)$ und dann auch $u = \cos(-t)$.

Wie bereits angedeutet, sind im Körper $\mathbb{C}$ Gleichungen der Form $z^n = c$ stets, also für alle $c \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, lösbar. Jetzt können wir die Aussage auch beweisen:

Satz 4.23 *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $c \in \mathbb{C}^*$ existiert ein $z \in \exp(\mathbb{R} \times \mathrm{i}(-\pi/n,\pi/n])$ mit $z^n = c$.*

Beweis. Es sei $c \in \mathbb{C}^*$. Nach Bemerkung 2.18 existieren $r > 0$, $\zeta \in \mathbb{S}$ mit $c = r\zeta$. Nach Bemerkung und Definition 4.14 ist $r = \mathrm{e}^s$ für ein $s \in \mathbb{R}$ und nach Bemerkung und Definition 4.22 ist $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für ein $t \in (-\pi,\pi]$. Mit $w := s/n + \mathrm{i}t/n$ und $z := \mathrm{e}^w$ ergibt sich $z^n = (\mathrm{e}^{s/n+\mathrm{i}t/n})^n = \mathrm{e}^{s+\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^s\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = c$. □

Bemerkung und Definition 4.24 Sind $(X,+)$ eine Halbgruppe, $a \in X$ und $f : X \to Y$, so definieren wir $\sigma_a f : X \to Y$ durch

$$(\sigma_a f)(x) := f(x+a) \qquad (x \in X).$$

Für die Exponentialfunktion gilt $\sigma_a \exp = \mathrm{e}^a \exp$ für alle $a \in \mathbb{C}$. Man nennt f **periodisch** mit **Periode** a (oder kurz a-periodisch), falls $\sigma_a f = f$ gilt, d. h. falls $f(x+a) = f(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt ist. Nach Bemerkung und Definition 4.22 ist exp periodisch mit Periode $2\pi\mathrm{i}$.

[37] Die Formel $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} + 1 = 0$ kombiniert über die imaginäre Einheit i in eleganter Weise die reellen Zahlen $0, 1, \mathrm{e}$ und π.

Satz 4.25 *Es gilt*

$$\sigma_{\pi/2} \cos = -\sin, \quad \sigma_\pi \cos = -\cos \quad \textit{und} \quad \sigma_{2\pi} \cos = \cos \tag{4.7}$$

sowie

$$\sigma_{\pi/2} \sin = \cos, \quad \sigma_\pi \sin = -\sin \quad \textit{und} \quad \sigma_{2\pi} \sin = \sin\,. \tag{4.8}$$

Außerdem ist $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ *streng wachsend und* $\cos|_{[0,\pi]}$ *streng fallend.*

Beweis. Die Additionstheoreme besagen, dass für $a \in \mathbb{C}$

$$\sigma_a \cos = \cos(a)\cos - \sin(a)\sin \qquad \text{und} \qquad \sigma_a \sin = \cos(a)\sin + \sin(a)\cos$$

gilt. Mit $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos\pi = -1$ und $\cos(2\pi) = 1$ sowie $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin\pi = \sin(2\pi) = 0$ (siehe Bemerkung und Definition 4.22) ergeben sich (4.7) und (4.8). Weiterhin folgt für $z, w \in \mathbb{C}$ aus dem zweiten Additionstheorem

$$\sin(z+w) - \sin(z-w) = 2\cos(z)\sin(w)\ .$$

Also ergibt sich für $s, t \in \mathbb{R}$

$$\sin(2t) - \sin(2s) = \sin(t+s+t-s) - \sin(t+s-(t-s)) = 2\cos(t+s)\sin(t-s)\,.$$

Ist $-\pi/4 \le s < t \le \pi/4$, so gilt $t+s \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $t-s \in (0, \pi/2]$. Nach Bemerkung und Definition 4.22 sind $\sin(t-s)$ und $\cos(t+s)$ positiv. Also ist $\sin(2s) < \sin(2t)$. Damit ist $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ streng wachsend. Die Aussage für cos folgt mit (4.7) □

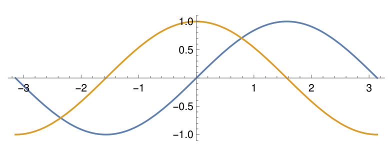


Abbildung 11: sin und cos.

Bemerkung und Definition 4.26 Die nach Satz 3.32, Bemerkung und Definition 4.22 und Satz 4.25 auf $[-1,1]$ existierende, streng wachsende und stetige Umkehrfunktion von $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ heißt **Arkussinus** (kurz arcsin). Entsprechend bezeichnet man die auf $[-1,1]$ existierende und dort streng fallende und stetige Umkehrfunktion von $\cos|_{[0,\pi]}$ mit **Arkuskosinus** (kurz arccos).

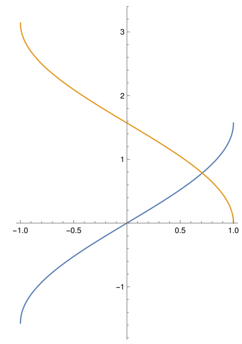


Abbildung 12: arcsin und arccos.

Hinsichtlich der Eins-Stellen von exp und der Nullstellen der trigonometrischen Funktionen hat man

Satz 4.27 *Es gilt* $Z(\exp - 1) = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ *sowie* $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ *und* $Z(\cos) = \pi\mathbb{Z} + \pi/2$.

Beweis. 1. Aus der 2πi-Periodizität von exp und $\mathrm{e}^0 = 1$ folgt $Z(\exp - 1) \supset 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.
Da cos streng fallend auf $[0, \pi]$ ist und $\cos(2\pi - t) = \cos(-t) = \cos t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\cos(t) < 1$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, also $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$ für $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Ist nun $z = s + \mathrm{i}t$ mit $\mathrm{e}^z = 1$, so gilt $1 = |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^s$ und folglich $s = 0$. Damit ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 1$, also $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, das heißt $z = \mathrm{i}t \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.
2. Es gilt $0 = 2\mathrm{i}\sin z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$ genau dann, wenn $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1 = 0$ ist. Aus 1. ergibt sich damit $Z(\sin) = \pi\mathbb{Z}$ und mit (4.7) dann auch $Z(\cos) = \pi\mathbb{Z} + \pi/2$. $\square$

Bemerkung und Definition 4.28 Die **Tangensfunktion** $\tan : \mathbb{C} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \pi/2) \to \mathbb{C}$ und die **Kotangensfunktion** $\cot : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}\,, \qquad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}\,.$$

Da Quotienten stetiger Funktionen stetig sind, sind die Funktionen tan und cot stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen. Weiterhin kann man zeigen, dass tan streng wachsend in $(-\pi/2, \pi/2)$ und cot streng fallend in $(0, \pi)$ sind mit $W(\tan|_{(-\pi/2,\pi/2)}) = W(\cot|_{(0,\pi)}) = \mathbb{R}$ ([Ü]). Also existieren auf $\mathbb{R}$ die – dort stetigen – Umkehrfunktionen, genannt **Arkustangens** (kurz arctan) beziehungsweise **Arkuskotangens** (kurz arccot), mit entsprechenden Monotonieeigenschaften.

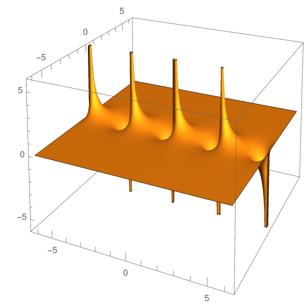


Abbildung 13: $z \mapsto \mathrm{Re}(\cot z)$

Bemerkung und Definition 4.29 Ist $z \in \mathbb{C}^*$, so existieren nach Satz 4.23 mit $n = 1$ Punkte $s \in \mathbb{R}$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$ mit $z = \mathrm{e}^{s+\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Dabei ist $r := e^s = |z|$. Nach Satz 4.27 ist θ durch z eindeutig festgelegt (ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, so ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta'-\theta)} = 1$, also $\theta' = \theta + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$). Man nennt $\arg z := \theta$ das **Argument** von z und das Paar $(r, \theta) = (|z|, \arg z)$ die **Polarkoordinaten** von z. Damit ist

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten wird die Multiplikation komplexer Zahlen sehr natürlich: Sind $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ und $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, so ist $zw = r\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}$.

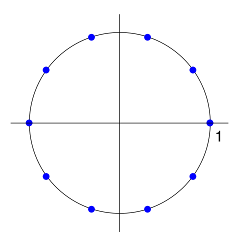


Abbildung 14: Zehnte Einheitswurzeln.

Bemerkung und Definition 4.30 Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C}^*$. Nach Satz 4.23 existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = c$ und $\arg z \in (-\pi/n, \pi/n]$. Aufgrund der $2\pi\mathrm{i}$-Periodizität von exp ist auch $(z\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n})^n = c$ für $k \in \mathbb{Z}$, wobei die n Zahlen

$$z_k := z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

nach Satz 4.27 paarweise verschieden sind und alle Lösungen der Gleichung darstellen. Man nennt $z_0, \ldots, z_{n-1}$ die n-ten **Wurzeln** aus c. Im Fall $c = 1$ spricht man auch von den n-ten **Einheitswurzeln**. So sind etwa ± 1 die zweiten Einheitswurzeln und $\pm i, \pm 1$ die vierten Einheitswurzeln. Allgemein sind die n-ten Einheitswurzeln gegeben durch $z_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}$ für $k = 0, \ldots, n-1$. Abbildung 14 zeigt die zehnten Einheitswurzeln. [38]

Die Existenz von Wurzeln bedeutet, dass Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $p(z) = z^n - c$ stets Nullstellen besitzen. Wir zeigen nun ganz allgemein:

Satz 4.31 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes nichtkonstante Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.

Beweis. Angenommen $Z(p) = \varnothing$. Dann ist die rationale Funktion $f := 1/p$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$. Nach Bemerkung und Definition 3.12 gilt $f(z) \to 0$ für $z \to \omega$. Also existiert ein $R > 0$ mit $|f(z)| < |f(0)|$ für $|z| > R$. Nach Satz 3.36 wird $|f|$ maximal auf der kompakten Kreisscheibe $B_R(0)$. Ist $|f(a)| = \max_{B_R(0)} |f|$, so ist wegen $|f(a)| \geq |f(0)|$ auch $|f(a)| = \max_{\mathbb{C}} |f|$ und damit

$$|p(a)| = \min_{\mathbb{C}} |p|.$$

Wir können ohne Einschränkung $a = 0$ und $p(0) = 1$ annehmen (sonst betrachte man $p(z+a)/p(a)$). Dann existieren ein $m \in \{1, \ldots, \deg(p)\}$, ein $c_m \neq 0$ und ein Polynom q mit $q(0) = 0$ und

$$p(z) = 1 + c_m z^m + z^m q(z)\,.$$

Nach Bemerkung 4.30 existiert eine m-te Wurzel ζ aus $-|c_m|/c_m$. Damit ist

$$1 + c_m (r\zeta)^m = 1 - r^m |c_m|$$

für $r > 0$. Wählt man $r > 0$ so, dass $r^m \leq |c_m|$ und $|\zeta^m q(r\zeta)| < |c_m|$, so folgt

$$|p(r\zeta)| < 1 - r^m |c_m| + r^m |c_m| = 1,$$

im Widerspruch zu $|p| \geq 1$. □

[38] Geometrisch interpretiert sind die n-ten Einheitswurzeln die Ecken des dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären n-Ecks.

5 Differenzierbarkeit und Extremstellen

Wir betrachten wieder Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, wobei $X \subset \mathbb{K}$. Um das Veränderungsverhalten solcher Funktionen untersuchen zu können, brauchen wir einen über die Stetigkeit hinausgehenden Glattheitsbegriff.

Bemerkung und Definition 5.1 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{C}$. Die Funktion f ist stetig an der Stelle $a \in X' \cap X$ genau dann, wenn für die Funktion $\tau_a f : (X-a) \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\tau_a f(h) := (\tau_a f)(h) := f(a+h) - f(a) \qquad (h \in X - a),$$

abklingend ist an 0 ist.[39] f heißt **differenzierbar an der Stelle** a, falls ein $c \in \mathbb{C}$ so existiert, dass $h \mapsto (\tau_a f(h) - ch)/|h|$ an 0 abklingend ist. Die Zahl

$$f'(a) := c = \lim_{h \to 0} \frac{\tau_a f(h)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(oder auch die Abbildung $h \mapsto ch$) nennt man **Ableitung** von f an der Stelle a.[40] Damit ist f genau dann differenzierbar an a, wenn $\tau_a f$ an 0 differenzierbar ist, und dann gilt $f'(a) = (\tau_a f)'(0)$. Ist $g : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar an $a \in X$, so ist für $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\lambda f + g$ differenzierbar an a mit

$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)\ .$$

> Denn: für $h \in X - a$ gilt $\tau_a(\lambda f + g)(h) = \lambda \tau_a f(h) + \tau_a g(h)$. Damit ergibt sich die Aussage nach Division durch h und Grenzwertbildung für $h \to 0$.

f heißt **differenzierbar** (auf X), falls f in jedem Punkt $x \in X$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : X \to \mathbb{C}$ **Ableitung** von f. Ist a Nullstelle von f', so nennt man a eine **kritische Stelle** von f.

Bemerkung 5.2 Ist f konstant, so ist $f' = 0$. Sind $n \in \mathbb{N}$ und $f(z) = z^n$ für $z \in \mathbb{C}$, so gilt nach Satz 1.24

$$\frac{\tau_z f(h)}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-1-k} \to \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1} = nz^{n-1} \quad (h \to 0).$$

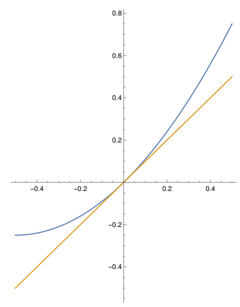


Abbildung 15: $h \mapsto \tau_{1/2} f(h)$ und $h \mapsto f'(1/2)h = h$ für $f(x) = x^2$.

Also ist f differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = kz^{k-1}$. Nach Bemerkung und Definition 5.1 sind beliebige Polynome $p(z) = \sum_{k=0}^{d} c_k z^k$ differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{d} kc_k z^{k-1} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Ist etwa $p(z) = 2z^3 + 3z^2$, so gilt

$$p'(z) = 6z^2 + 6z = 6z(z+1).$$

Hier sind -1 und 0 die kritischen Stellen.

Bemerkung 5.3 Ist f differenzierbar an a, so ist wegen

$$\tau_a f(h) = h \frac{\tau_a f(h)}{h} \to 0 \cdot f'(a) = 0 \quad (h \to 0)$$

f auch stetig an a. Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig auf $[0, \infty)$, aber wegen

$$\sqrt{h}/h = 1/\sqrt{h} \to +\infty \quad (h \to 0)$$

nicht differenzierbar an der Stelle $a = 0$.

Satz 5.4 *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $f_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f_\lambda(z) = \mathrm{e}^{\lambda z}$ differenzierbar mit*

$$f'_\lambda(z) = \lambda f_\lambda(z) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

kurz $(z \mapsto \mathrm{e}^{\lambda z})' = (z \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\lambda z})$. Insbesondere ist $\exp' = \exp$.

[39] Man nennt $\tau_a f$ das Inkrement von f bezüglich a.
[40] Die Funktion $h \mapsto f(a) + ch$ nennt man auch **Linearisierung** von f an a.

Beweis. Für $\lambda = 0$ ist die Behauptung klar. Ist $\lambda \neq 0$, so gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit (4.3)

$$\frac{\tau_z f_\lambda(h)}{h} = \frac{\tau_{\lambda z} \exp(\lambda h)}{h} = \lambda \exp(\lambda z) \frac{\exp(\lambda h) - 1}{\lambda h} \to \lambda \exp(\lambda z) \quad (h \to 0).$$

□

Beispiel 5.5 Die Funktionen sin und cos sind differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit

$$\sin' = \cos \qquad \text{und} \qquad \cos' = -\sin.$$

Denn: Mit $\lambda := \pm \mathrm{i}$ folgt aus Satz 5.4

$$\sin'(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - (-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \cos(z) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Die Aussage für cos ergibt sich entsprechend.

Ist $b > 0$, so folgt wegen $b^z = \mathrm{e}^{z \ln b}$ aus Satz 5.4

$$\big(z \mapsto b^z\big)' = \big(z \mapsto b^z \ln b\big).$$

Differenzialrechnung kann man sehr gut nutzen, um das lokale Verhalten differenzierbarer Funktionen zu untersuchen. Eine erste Aussage ist

Definition 5.6 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in X$ heißt **Minimalstelle** von f, falls ein $\delta > 0$ existiert mit

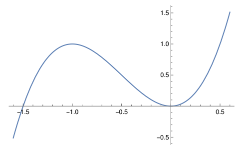
$$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in \dot{U}_\delta(a)),$$

falls also $f|_{U_\delta(a)}$ an der Stelle a minimal wird. Gilt $>$ statt $\geq$, so spricht man von einer strikten Minimalstelle. Der Punkt a heißt (strikte) **Maximalstelle**, falls a (strikte) Minimalstelle von $-f$ ist. Ist a eine Maximal- oder eine Minimalstelle von f, so nennt man a auch eine **Extremstelle** von f.

Beispiel 5.7 Wir betrachten wieder das Polynom

$$p(x) = x^2(2x+3) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

aus Bemerkung 5.2 mit den kritischen Stellen -1 und 0. Hier ist $p(x) \geq 0$ für $x > -3/2$. Wegen $p(0) = 0$ ist 0 Minimalstelle. Außerdem ist $p(x) - 1 = (1+x)^2(2x-1)$, also $p(x) \leq 1$ für $x < 1/2$. Wegen $p(-1) = 1$ ist also -1 eine Maximalstelle von p. Man beachte aber, dass p weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum hat.



Satz 5.8 *Es sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ differenzierbar an $a \in (\alpha, \beta)$. Ist a Extremstelle von f, so ist a eine kritische Stelle.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei a eine Minimalstelle (sonst betrachte man $-f$). Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\tau_a f(h) \geq 0$ für $|h| < \delta$. Wegen

$$\frac{\tau_a f(h)}{h} \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } \; 0 < h < \delta \\ \leq 0, & \text{falls } \; -\delta < h < 0 \end{cases}$$

ist notwendig $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau_a f(h)/h = 0$. □

Bemerkung 5.9 Kritische Stellen a sind nach Satz 5.8 die einzig *möglichen* Extremstellen differenzierbarer Funktionen auf (u, v). Das Verschwinden von f' an a ist allerdings lediglich eine *notwendige* Bedingung dafür, dass a eine Extremstelle ist. So ist etwa für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ der Nullpunkt eine kritische Stelle, aber keine Extremstelle.

Wir ergänzen diesen Abschnitt und starten gleichzeitig die Vorlesung Analysis einer und mehrerer Veränderlicher mit (weiteren) Rechenregeln für Ableitungen.

Satz 5.10 (Kettenregel)
Es seien $X, U \subset \mathbb{K}$, $f : X \to \mathbb{C}$ und $\varphi : U \to X$. Ist φ differenzierbar an v und ist f differenzierbar an $a := \varphi(v)$, so ist $f \circ \varphi$ differenzierbar an v mit

$$(f \circ \varphi)'(v) = f'(a)\varphi'(v) \; .$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Spezialfall $v = 0$ und $f(0) = \varphi(0) = 0$. Ist $\delta(x) := f(x)/x$ für $x \in X \setminus \{0\}$ und $\delta(0) := f'(0)$, so ist $\delta : X \to \mathbb{C}$ stetig an 0, da

f differenzierbar an 0 ist. Da φ stetig an 0 ist, gilt $(\delta \circ \varphi)(u) \to f'(0)$ für $u \to 0$ mit Satz 3.27, angewandt auf δ statt f. Aus $\varphi(u)/u \to \varphi'(0)$ für $u \to 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{u}(f \circ \varphi)(u) = \frac{\varphi(u)}{u}(\delta \circ \varphi)(u) \to \varphi'(0)f'(0) \quad (u \to 0)$$

und damit $(f \circ \varphi)'(0) = \varphi'(0)f'(0)$. Nun seinen v sowie $a = \varphi(v)$ und $f(a)$ beliebig. Dann gilt $\tau_v(f \circ \varphi) = \tau_a f \circ \tau_v \varphi$ (für $u \in U - v$ sind beide Seiten $= f(\varphi(u+v)) - f(v)$ an der Stelle u) und damit nach dem Spezialfall

$$(\tau_v(f \circ \varphi))'(0) = (\tau_a f)'(0)(\tau_v \varphi)'(0) = f'(a)\varphi'(v).$$

Also ist $f \circ \varphi$ differenzierbar an v mit $(f \circ \varphi)'(v) = f'(a)\varphi'(v)$. $\square$

Beispiel 5.11 Für $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(u) = \sin(u^2)$ gilt $g'(u) = 2u\cos(u^2)$ nach Beispiel 5.5 und der Kettenregel, angewandt mit $f(z) = \sin z$ und $\varphi(u) = u^2$.

Satz 5.12 (Produktregel und Quotientenregel)
Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f, g : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar an der Stelle $a \in X$. Dann ist auch $f \cdot g$ differenzierbar an a mit

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \ .$$

Ist g nullstellenfrei, so ist f/g differenzierbar an a mit

$$(f/g)'(a) = f'(a)/g(a) - f(a)g'(a)/g^2(a).$$

Beweis. Es gilt

$$\tau_a(f \cdot g)(h) = g(a+h) \cdot \tau_a f(h) + f(a) \cdot \tau_a g(h) \qquad (h \in X - a).$$

Nach Bemerkung 5.3 ist g stetig an a. Damit ergibt sich die erste Aussage nach Division durch h und Grenzwertbildung für $h \to 0$.
Es sei nun g nullstellenfrei. Ist $h(w) := 1/w$, so gilt $h'(w) = -1/w^2$ für $w \in \mathbb{C}^*$ ([Ü]), also mit der Kettenregel

$$(1/g)'(a) = (h \circ g)'(a) = h'(g(a))g'(a) = -g'(a)/g^2(a).$$

Aus der Produktregel folgt $(f/g)'(a) = f'(a)/g(a) - f(a)g'(a)/g^2(a)$. $\square$

Beispiel 5.13 Aus Beispiel 5.5 und der Quotientenregel folgt

$$\tan' = \sin' / \cos - \sin\cos' / \cos^2 = 1 + \sin^2 / \cos^2 = 1 + \tan^2$$

auf $\mathbb{C} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \pi/2)$ und entsprechend $\cot' = -(1 + \cot^2)$ auf $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$

Satz 5.14 (Umkehrregel)
Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to Y \subset \mathbb{C}$ bijektiv. Ist f differenzierbar an der Stelle $a \in X$ mit $f'(a) \neq 0$ und ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig an $c := f(a)$, so ist f^{-1} differenzierbar an c mit

$$(f^{-1})'(c) = 1/f'(a) = 1/(f'(f^{-1}(c)) \ .$$

Beweis. Ist (x_n) eine Folge in X mit $a \neq x_n \to a$ $(n \to \infty)$, so gilt aufgrund der Stetigkeit von f an a und der Injektivität auch $f(a) \neq f(x_n) \to f(a)$. Also ist c ein Häufungspunkt von Y.
Es sei zunächst $a = c = 0$. Dann ist f^{-1} stetig an 0. Also gilt $f^{-1}(u) \to 0$ $(u \to 0)$ und folglich wegen $f^{-1}(u) \neq 0$ für $u \neq 0$ mit Satz 3.27

$$\frac{f^{-1}(u)}{u} = \frac{f^{-1}(u)}{f(f^{-1}(u))} \to \frac{1}{f'(0)} \qquad (u \to 0) \ .$$

Sind a, c beliebig, so gilt $\tau_c f^{-1} \circ \tau_a f = \tau_a \mathrm{id}_{I-a} = \mathrm{id}_I$ und damit $\tau_c f^{-1} = (\tau_a f)^{-1}$, also

$$(f^{-1})'(c) = (\tau_c f^{-1})'(0) = 1/(\tau_a f)'(0) = 1/f'(c).$$

□

Bemerkung 5.15 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ und $f : X \to Y \subset \mathbb{C}$ so, dass $f' = g \circ f$ mit einer nullstellenfreien Funktion $g : Y \to \mathbb{C}$.[41] Ist f bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion, so gilt nach der Umkehrregel

$$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}) = 1/g.$$

[41]Gleichungen der Form $f' = g \circ f$ nennt man autonome Differenzialgleichungen.

Beispiel 5.16 1. Mit $f(s) := e^s$ für $s \in \mathbb{R}$ und $g(t) := t$ für $t > 0$ und folgt aus Bemerkung 5.15

$$\ln'(t) = 1/t \qquad (t > 0)\ .$$

Damit ergibt sich für festes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit der Kettenregel auch die Differenzierbarkeit von $t \mapsto t^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln t}$ auf $(0, \infty)$ mit Ableitung

$$t \mapsto \alpha t^{\alpha - 1}.$$

2. Mit $f(s) = \tan(s)$ für $s \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $g(t) := 1 + t^2$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt nach Beispiel 5.13 und Bemerkung 5.15

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Entsprechend erhält man $\operatorname{arccot}'(t) = -1/(1+t^2)$ für $t \in \mathbb{R}$.
3. Es gilt ([Ü])

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ , \qquad \arccos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (t \in (-1,1)).$$

Bemerkung 5.17 Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$, so ist f differenzierbar und bijektiv mit stetiger Umkekrfunktion f^{-1}. An der kritischen Stelle 0 von f gilt $f(0) = 0$, aber f^{-1} ist nicht differenzierbar an 0 ([Ü]).
Ist X ein Intervall und ist $f : X \to Y$ bijektiv, stetig und *reellwertig*, also $Y \subset \mathbb{R}$, so ist die Umkehrfunktion f^{-1} nach Bemerkung 3.33 ebenfalls stetig. Sind $X = [0, 2\pi)$ und $f : X \to \mathbb{S}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, so ist f bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 0$ für alle x. Die Umkehrfunktion ist allerdings an der Stelle 1 nicht stetig ([Ü]) und damit auch nicht differenzierbar. Man sieht also, dass man im Allgemeinen auf die Stetigkeitsvoraussetzung an f^{-1} in Satz 5.14 nicht verzichten kann.

Wir betrachten nun differenzierbare reellwertige Funktionen auf Intervallen.

Satz 5.18 (Rolle)
Es sei $I = (\alpha, \beta)$. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und existiert ein $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $f(x) \to c$ für $x \to \alpha$ und $x \to \beta$, so wird f maximal oder minimal. Ist f differenzierbar, so hat f eine kritische Stelle.

Beweis. Denn: Ohne Einschränkung sei f nicht konstant und $u \in I$ mit $f(u) \neq c$. Ist $f(u) > c$, so existiert ein kompaktes Intervall $K \subset I$ mit $u \in K$ und $f(u) > f(x)$ für $x \in I \setminus K$. Nach Satz 3.36 wird f maximal auf K. Ist $a \in K$ so, dass $f(a) \geq f(x)$ für $x \in K$, so ist auch $f(a) \geq f(x)$ für $x \in I$. Damit wird f maximal auf I. Ist $f(u) < c$, so wird entsprechend f minimal. Insbesondere hat f stets eine Extremstelle. Ist f differenzierbar, so ist jede Extremstelle nach Satz 5.8 eine kritische Stelle. $\square$

Es sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$. Gilt $f(x) \to c \in \mathbb{C}$ für $x \to \alpha$ so schreiben wir $f(\alpha^+)$ für den (rechtsseitigen) Grenzwert c. Entsprechend schreiben wir $f(\beta^-) := c$, falls $f(x) \to c$ für $x \to \beta$.

Satz 5.19 (Mittelwertsatz und erweiterter Mittelwertsatz)
Es seien $I = (\alpha, \beta)$ und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und so, dass $f(\alpha^+)$ und $f(\beta^-)$ existieren. Ist I beschränkt, so existiert ein $\tau \in I$ mit

$$f(\beta^-) - f(\alpha^+) = f'(\tau)(\beta - \alpha).$$

Ist $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und so, dass $g(\alpha^+)$ und $g(\beta^-)$ existieren, so existiert ein $\tau \in I$ mit

$$(f(\beta^-) - f(\alpha^+))g'(\tau) = f'(\tau)(g(\beta^-) - g(\alpha^+)).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die zweite Aussage. Dazu betrachten wir die Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) := \big(f(\beta^-) - f(\alpha^+)\big)g(t) - f(t)\big(g(\beta^-) - g(\alpha^+)\big) \qquad (t \in I).$$

Da $\varphi(\beta^-) = \varphi(\alpha^+) = f(\alpha^+)g(\beta^-) - f(\beta^-)g(\alpha^+)$ gilt, folgt die zweite Aussage aus Satz 5.18 mit φ statt f. Die erste ergibt sich aus der zweiten indem man $g = \mathrm{id}_I$ setzt. $\square$

Satz 5.20 *Es seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar im Inneren I° von I.*[42] *Ist $f' \geq 0$ auf I°, so ist f wachsend auf I. Ist dabei $f' > 0$, so ist f streng wachsend. Eine entsprechende Aussage gilt mit fallend statt wachsend und mit $\leq$ bzw. $<$ statt $\geq$ bzw. $>$. Insbesondere ist f konstant falls $f' = 0$ ist.*

[42] Das Innere I° von I ist I ohne Randpunkte.

Beweis. Es sei $f' \geq 0$. Sind $s, t \in I$ mit $s < t$, so existiert nach dem Mittelwertsatz (Satz 5.19) ein $\tau \in (s, t)$ mit $f(t) - f(s) = f'(\tau)(t - s) \geq 0$. Also ist $f(s) \leq f(t)$. Ist dabei $f'(\tau) > 0$, so ist $f(s) < f(t)$. Durch Anwendung auf $-f$ ergibt sich die zweite Aussage. Ist f wachsend und fallend, so ist f konstant. □

Beispiel 5.21 1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(vgl. Bemerkung 5.2 und Beispiel 5.7). Dann gilt

$$f'(x) = 6x(x+1) \begin{cases} > 0, & \text{für } x \in (-\infty, -1) \\ < 0, & \text{für } x \in (-1, 0) \\ > 0, & \text{für } x \in (0, \infty) \end{cases} .$$

Nach Satz 5.20 ist f streng wachsend auf $(-\infty, -1]$, streng fallend auf $[-1, 0]$ und streng wachsend auf $[0, \infty)$.

2. Wegen $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2 > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\sinh' = \cosh$ ist die Funktion $\sinh|_{\mathbb{R}}$ nach Satz 5.20 streng wachsend. Mit $\sinh(0) = 0$ ist insbesondere $\sinh > 0$ auf

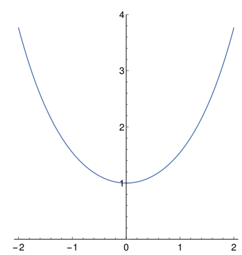


Abbildung 16: cosh auf dem Intervall $[-2, 2]$.

$(0, \infty)$ und $\sinh < 0$ auf $(-\infty, 0)$. Wegen $\cosh' = \sinh$ ist $\cosh|_{\mathbb{R}}$ nach Satz 5.20 streng wachsend auf $[0, \infty)$ und streng fallend auf $(-\infty, 0]$.[43]

Bemerkung 5.22 (Vorzeichenwechsel-Kriterium) Es seien I ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar auf I°. Satz 5.8 gibt ein notwendige Bedingung für Extremstellen in I°. In der anderen Richtung gilt:

[43] Sind $a < 0 < b$, so ist der Graph von $\cosh|_{[a,b]}$ eine sogenannte Kettenlinie. Sie beschreibt den Durchhang einer an ihren Enden $(a, \cosh(a))$ und $(b, \cosh(b))$ aufgehängten Kette unter Einfluss der Schwerkraft.

1. Existiert ein $\delta > 0$ mit $f' \leq 0$ auf $I \cap (a-\delta, a)$ und $f' \geq 0$ auf $I \cap (a, a+\delta)$ so ist a eine Minimalstelle von f.

2. Existiert ein $\delta > 0$ mit $f' \geq 0$ auf $I \cap (a-\delta, a)$ und $f' \leq 0$ auf $I \cap (a, a+\delta)$, so ist a eine Maximalstelle von f.

Gilt hierbei $f' < 0$ beziehungsweise $f' > 0$, so ist das Extremum strikt.

> Denn: Es reicht, den ersten Fall zu betrachten. Der zweite ergibt sich wieder durch Anwendung des ersten. auf $-f$. Nach Satz 5.20 ist f wachsend auf $I \cap [a, a+\delta)$ und fallend auf $I \cap (a-\delta, a]$. Damit ist a eine Minimalstelle. Gilt dabei jeweils die strikte Ungleichung, so ist das Minimum strikt.

Beispiel 5.23 Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ sind nach Beispiel 5.21 und Bemerkung 5.22 der Nullpunkt eine strikte Minimalstelle und -1 eine strikte Maximalstelle. Für $\cosh|_{\mathbb{R}}$ ist 0 eine strikte Minimalstelle. Hier wird $\cosh|_{\mathbb{R}}$ sogar minimal an 0, d. h. die Funktion nimmt an 0 das Minimum an.

Bemerkung und Definition 5.24 Es seien $X \subset \mathbb{K}$ mit $X \subset X'$ und $f : X \to \mathbb{C}$.
1. Mit $f^{(0)} := f$ definiert man höhere Ableitungen rekursiv: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $f^{(n-1)}$ differenzierbar, so heißt f **n-mal differenzierbar** und die Funktion

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' : X \to \mathbb{C}$$

die **n-te Ableitung** von f. Dabei schreibt man meist $f'' := f^{(2)}$ und $f''' := f^{(3)}$. Ist $f^{(n)}$ stetig, so sagt man, f sei n-mal **stetig differenzierbar** und existiert $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so sagt man, f sei beliebig oft differenzierbar.
2. Im Fall $X \subset \mathbb{R}$ schreiben wir $C^n(X)$ für die Menge aller n-mal stetig diffenzierbaren Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$, und $C^\infty(X) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C^n(X)$. Damit haben wir die Inklusionskette $C^\infty(X) \subset C^{n+1}(X) \subset C^n(X) \subset C^0(X) = C(X)$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei sämtliche Inklusionen strikt sind ([Ü]).

Ein weiteres *hinreichendes* Kriterium für Extremstellen ist

Satz 5.25 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $a \in I$ eine kritische Stelle. Ist $f''(a) > 0$, so ist a eine strikte Minimalstelle und ist $f''(a) < 0$, so ist a eine strikte Maximalstelle.*

Beweis. Es sei $f''(a) > 0$. Da f'' stetig an a ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap I$. Damit ist f' nach Satz 5.20 streng wachsend auf $U_\delta(a) \cap I$. Aus $f'(a) = 0$ folgt $f' > 0$ auf $I \cap (a, a+\delta)$ und $f' < 0$ auf $I \cap (a-\delta, a)$. Nach dem Vorzeichenwechsel-Kriterium (Bemerkung 5.22) hat f an a ein striktes lokales Minimum. Der Fall $f''(a) < 0$ ergibt sich durch Anwendung auf $-f$. $\square$

Beispiel 5.26 Wir betrachten noch einmal die Funktionen aus Beispiel 5.21 und Beispiel 5.23. Für $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ gilt $f''(x) = 12x + 6$, also $f''(0) = 6 > 0$ an der kritischen Stelle 0 und $f''(-1) = -6 < 0$ an der kritischen Stelle -1. Nach Satz 5.25 ist 0 eine strikte Minimalstelle und -1 eine strikte Maximalstelle.
Da $\cosh'' = \cosh > 0$ auf $\mathbb{R}$ gilt, ist die kritische Stelle 0 von $\cosh|_\mathbb{R}$ eine strikte Mimimalstelle.

Als Anwendung des erweiterten Mittelwertsatze erhält man eine Methode für die mögliche Berechnung von Grenzwerten:

Satz 5.27 (Regeln von de l'Hospital)
Es seien $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f(\alpha^+) = g(\alpha^+) = 0 \quad \text{oder} \quad g(x) \to \pm\infty \quad (x \to \alpha).$$

Hat g keine kritischen Punkte und gilt

$$f'(t)/g'(t) \to c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \qquad (t \to \alpha),$$

so folgt

$$f(x)/g(x) \to c \qquad (x \to \alpha)\ .$$

Eine entsprechende Aussage gilt für Grenzwerte $x \to \beta$.

Beweis. 1. Es gelte $f(\alpha^+) = g(\alpha^+) = 0$. Ist $x \in I$, so ist nach dem Satz von Rolle $g(x) - g(\alpha^+) \neq 0$, da g keine kritischen Punkte hat. Nach dem erweiterten Mittelwertsatz (Satz 5.19) existiert ein $\tau(x) \in (\alpha, x)$ mit

$$\frac{f'(\tau(x))}{g'(\tau(x))} = \frac{f(x) - f(\alpha^+)}{g(x) - g(\alpha^+)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dabei gilt $\alpha < \tau(x) \to \alpha$ $(x \to \alpha)$. Also folgt

$$\frac{f'(\tau(x))}{g'(\tau(x))} \to c \quad (x \to \alpha).$$

2. Es gelte $g(x) \to \infty$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\delta > 0$ mit $g(t) > 0$ und $f'(t)/g'(t) \in U_\varepsilon(c)$ für $t \in U_\delta(\alpha)$.[44] Wir wählen ein $a \in U_\delta(\alpha)$. Ist $\alpha < x < a$, so existiert wieder nach dem erweitertem Mittelwertsatz ein $\tau(x) \in (x, a)$ mit

$$f'(\tau(x))(g(a) - g(x)) = (f(a) - f(x))g'(\tau(x)) \,,$$

also

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(\tau(x))}{g'(\tau(x))}(g(x) - g(a))$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(x)} + \frac{f'(\tau(x))}{g'(\tau(x))}\left(1 - \frac{g(a)}{g(x)}\right) .$$

Nach Voraussetzung gilt $f(a)/g(x) \to 0$ und $g(a)/g(x) \to 0$ $(x \to \alpha^+)$. Da

$$f'(\tau(x))/g'(\tau(x)) \in U_\varepsilon(c)$$

gilt, existiert ein $\eta > 0$ mit $f(x)/g(x) \in U_{2\varepsilon}(c)$ für $x \in U_\eta(\alpha)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

3. Gilt $g(x) \to -\infty$, so folgt $-g(x) \to \infty$ und damit die Behauptung aus 2. $\square$

Beispiel 5.28 Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0,$$

das heißt, die Logarithmusfunktion wächst langsamer als jede Potenzfunktion $x \mapsto x^\alpha$ mit positivem α. Dies ist eine Variante der Aussage, dass exponentielles Wachstum stärker ist als polynomiales.

> Denn: Mit $f(x) = \ln x$ und $g(x) = x^\alpha$ für $x > 0$ gilt $x^\alpha \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und
>
> $$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha x^\alpha} \to 0 \quad (x \to +\infty).$$
>
> Also folgt die erste Behauptung mit Satz 5.27. Die zweite ergibt sich aus der ersten durch Ersetzen von x durch $1/x$.

[44] Dabei ist $U_\rho(\pm\infty) := \{x \in \mathbb{R} : \pm x > 1/\rho\}$.

A Weiteres zu Mengen und Abbildungen

Definition A.1 Es seien $I \neq \varnothing$ eine Menge, X eine Menge und $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann heißen

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\}$$

Vereinigung von (A_α) und

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I\}$$

Durchschnitt von (A_α). Insbesondere sind damit für eine Menge von Mengen (einem sogenannten Mengensystem) $\mathcal{F}$ auch

$$\bigcup_{M\in\mathcal{F}} M \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{M\in\mathcal{F}} M$$

definiert (hier ist speziell $I = \mathcal{F}$ und $A_M = M$). Man schreibt dann auch kurz $\bigcup \mathcal{F}$ beziehungsweise $\bigcap \mathcal{F}$.

Nach Definition sind zwei Mengen gleich, wenn die erste Teilmenge der zweiten und die zweite Teilmenge der ersten ist. Daher beweist man üblicherweise die Gleichheit, indem man die beiden Inklusionen getrennt nachweist. Wir deuten dies im Weiteren durch die Schreibweise $\subset$: und $\supset$: in den entsprechenden Beweisen an.

Satz A.2 *Es seien X eine Menge, $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie von Mengen in X und $B \subset X$. Dann gilt*

$$B \cap \Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha) \quad \textit{und} \quad B \cup \Big(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha).$$

und (**De Morgansche Regeln**)

$$B \setminus \Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in I}(B \setminus A_\alpha) \quad \textit{und} \quad B \setminus \Big(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in I}(B \setminus A_\alpha).$$

Beweis. Wir werden exemplarisch die Beweise der links stehenden Aussage führen. Die rechten ergeben sich in ähnlicher Weise. Wir schreiben dabei kurz $\bigcup$ statt $\bigcup\limits_{\alpha\in I}$.

$\subset$: Es sei $x \in B \cap (\bigcup A_\alpha)$. Dann ist $x \in B$ und $x \in \bigcup A_\alpha$, also $x \in B$ und $x \in A_\beta$ für ein $\beta \in I$. Damit ist $x \in B \cap A_\beta$, also auch $x \in \bigcup (B \cap A_\alpha)$.
$\supset$: Es sei $x \in \bigcup (B \cap A_\alpha)$. Dann existiert ein $\beta \in I$ mit $x \in B \cap A_\beta$. Damit ist $x \in B$ und $x \in A_\beta$, also auch $x \in B$ und $x \in \bigcup A_\alpha$, das heißt $x \in B \cap (\bigcup A_\alpha)$.
$\subset$: Es sei $x \in B \setminus (\bigcup A_\alpha)$. Dann ist $x \in B$ und $x \notin \bigcup A_\alpha$, also $x \in B$ und $x \notin A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Damit ist $x \in B \setminus A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, also $x \in \bigcap (B \setminus A_\alpha)$.
$\supset$: Es sei $x \in \bigcap (B \setminus A_\alpha)$. Dann ist $x \in B \setminus A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, also $x \in B$ und $x \notin A_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Damit ist $x \in B$ und $x \notin \bigcup A_\alpha$, das heißt $x \in B \setminus (\bigcup A_\alpha)$. □

Definition A.3 Sind X, Y Mengen und ist $f : X \to Y$, so heißt für $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Urbildmenge von B unter f.

Satz A.4 *Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$.*

1. *Ist $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen in Y, so gilt*

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha) \quad \textit{und} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha).$$

2. *Ist $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen in X, so gilt*

$$f\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \quad \textit{und} \quad f\Big(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha).$$

Beweis.
1. Wir beschränken uns wieder auf die links stehende Aussage.
$\subset$: Es sei $x \in f^{-1}\big(\bigcup B_\alpha\big)$. Dann ist $f(x) \in \bigcup B_\alpha$, das heißt, es existiert ein $\beta \in I$ mit $f(x) \in B_\beta$. Also ist $x \in f^{-1}(B_\beta)$ und damit auch $x \in \bigcup f^{-1}(B_\alpha)$.
$\supset$: Ist $\beta \in I$, so ist $B_\beta \subset \bigcup B_\alpha$, also auch $f^{-1}(B_\beta) \subset f^{-1}\big(\bigcup B_\alpha\big)$. Da $\beta \in I$ beliebig war, gilt $\bigcup f^{-1}(B_\alpha) \subset f^{-1}\big(\bigcup B_\alpha\big)$.
2. Zur linken Aussage:
$\subset$: Es sei $y \in f\big(\bigcup A_\alpha\big)$. Dann existiert ein $x \in \bigcup A_\alpha$ mit $f(x) = y$. Ist $\beta \in I$ mit $x \in A_\beta$, so ist also $y = f(x) \in f(A_\beta)$. Damit ist $y \in \bigcup f(A_\alpha)$.

$\supset$: Ist $\beta \in I$, so ist $A_\beta \subset \bigcup A_\alpha$, also auch $f(A_\beta) \subset f\big(\bigcup A_\alpha\big)$. Da $\beta \in I$ beliebig war, gilt $\supset$.
Zur rechten Aussage: Es sei $y \in f\big(\bigcap A_\alpha\big)$. Dann existiert ein $x \in \bigcap A_\alpha$ mit $f(x) = y$. Damit ist $y = f(x) \in f(A_\alpha)$ für jedes $\alpha \in I$, d. h. $y \in \bigcap f(A_\alpha)$. $\square$

Bemerkung A.5 Man beachte, dass in der letzten Aussage des zweiten Teils von Satz A.4 kein Gleichheitszeichen steht. Ist etwa $f : \mathbb{Z} \to Z$ definiert durch $f(x) := x^2$ für $x \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$f(\{1\} \cap \{-1\}) = f(\varnothing) = \varnothing \quad \text{und} \quad f(\{1\}) \cap f(\{-1\}) = \{1\}.$$

Damit gilt hier keine Gleichheit. Tatsächlich liegt Gleichheit für alle Familien (A_α) genau dann vor, wenn f injektiv ist ([Ü]).

Definition A.6 Es seien A, B beliebige Mengen.
1. A und B heißen **gleichmächtig**, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : A \to B$ existiert.[45]
2. Ist A gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so sagt man, dass A die **Mächtigkeit** n hat (man kann zeigen, dass n eindeutig ist). Der leeren Menge wird die Mächtigkeit 0 zugeordnet. Wir schreiben dann $\#A := n$. Damit heißt A **endlich**, falls A eine Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}_0$ hat und **unendlich**, falls dies nicht der Fall ist.[46]
3. Eine Menge A heißt **abzählbar**, falls A gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ oder endlich ist. Ist A nicht abzählbar, so sagt man A sei überabzählbar.

Beispiel A.7 Man kann zeigen ([Ü]), dass etwa $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, also insbesondere abzählbar sind.

Bemerkung und Definition A.8 Es sei X eine Menge. Eine Familie $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Mengen in X heißt **disjunkt**, falls $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ für $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$ gilt. Ist A eine Menge und ist $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine disjunkte Familie nichtleerer Mengen mit $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, so nennt man $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine **Zerlegung** von A. Ist A endlich und $(A_1, \ldots, A_n)$ eine Zerlegung von A, so gilt

$$\#A = \#A_1 + \ldots + \#A_n.$$

[45] d. h. es existiert eine eins-zu-eins Zuordnung zwischen den Elementen aus A und denen aus B.
[46] Ist A unendlich, so schreibt man auch $\#A = \infty$.

B Von den natürlichen zu den reellen Zahlen

In diesem Anhang werden wir auf die axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen eingehen und einen darauf basierenden konstruktiven Zugang über die ganzen und die rationalen Zahlen zu den reellen *skizzieren*.

Die **natürlichen Zahlen** können axiomatisch beschrieben werden als Tripel $(\mathbb{N}, 1, \nu)$ mit den drei Eigenschaften (**Peano-Axiome**):

(N1) $\mathbb{N}$ ist eine Menge mit $1 \in \mathbb{N}$.

(N2) $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine injektive Funktion mit $1 \notin \nu(\mathbb{N})$.[47]

(N3) (Prinzip der vollständigen Induktion) Ist $A \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in A$ und $\nu(A) \subset A$, so ist $A = \mathbb{N}$.

Damit definiert man die arabischen Ziffern durch $2 := \nu(1)$, $3 := \nu(2)$, $4 := \nu(3)$, $5 := \nu(4)$, $6 := \nu(5)$, $7 := \nu(6)$, $8 := \nu(7)$ und $9 := \nu(8)$. Weiter kann man – mit viel Aufwand – zeigen:

Auf $\mathbb{N}$ ist durch $n + 1 := \nu(n)$ und $n + \nu(m) := \nu(n + m)$ für $n, m \in \mathbb{N}$ eine assoziative und kommutative Verknüpfung $+$ rekursiv definiert. Unter Verwendung der Addition ist durch $n < m$ falls $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ zudem eine Ordnungsrelation $<$ auf $\mathbb{N}$ gegeben. Damit kann man wiederum zeigen: Auf $\mathbb{N}$ ist durch $n \cdot 1 := 1$ und $n(m + 1) := nm + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$ eine assoziative und kommutative Verknüpfung $\cdot$ rekursiv definiert. So wird $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ zu einem abelschen Monoid.

Erweitert man $\mathbb{N}$ um ein Element 0 zu $\mathbb{N}_0$ mit $0 < n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und so, dass $n + 0 := 0 + n := n$ und $n \cdot 0 := 0 \cdot n := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist auch $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ ein abelsches Monoid.

Bemerkung B.1 Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die wichtige **Wohlordnungseigenschaft** von $\mathbb{N}_0$ ([Ü]):

Jede nichtleere Menge $M \subset \mathbb{N}_0$ hat ein minimales Element.

Hiermit kann man leicht zeigen: Zu jedem Paar $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existiert genau ein Paar $(a, r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $r < p$ und $n = ap + r$ (Division mit Rest).

Ist $A \subset \mathbb{N}_0$, so heißt ein Tupel $(a_j) = (a_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in A^{\mathbb{N}_0}$ eine **abbrechende Folge** in A, falls ein $d \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $a_j = 0$ für $j > d$. Man nennt das kleinste solche d die

[47] Die Zahl $\nu(n)$ nennt man Nachfolger von n. (N2) besagt, dass 1 kein Nachfolger eines $n \in \mathbb{N}$ ist.

Länge von (a_j). Damit gilt folgende wichtige Aussage über die *Darstellung* natürlicher Zahlen:

Satz B.2 *Es seien $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ und $A := \{a \in \mathbb{N}_0 : a \leq q-1\}$.*[48] *Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ genau ein abbrechende Folge $(a_j(n))$ in A mit*

$$n = \sum_{j=0}^{d(n)} a_j(n) q^j,$$

wobei $d(n)$ die Länge von $(a_j(n))$ ist.

Beweis. 1. Eindeutigkeit: Es seien (b_j), (a_j) abbrechende Folgen in A mit

$$n = \sum_{j=0}^{m} a_j q^j = \sum_{j=0}^{m} b_j q^j.$$

Angenommen es ist $(a_j) \neq (b_j)$, also $J := \{j : a_j \neq b_j\} \neq \varnothing$ (und endlich). Ohne Einschränkung sei $b_N > a_N$, wobei N das maximale $j \in J$ ist. Es gilt ([Ü])

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j q^j < q^N$$

und damit wegen $a_j = b_j$ für $j > N$ und $a_N + 1 \leq b_N$

$$\sum_{j=0}^{m} a_j q^j = \sum_{j=0}^{N-1} a_j q^j + a_N q^N + \sum_{j>N} a_j q^j < (a_N+1) q^N + \sum_{j>N} b_j q^j \leq \sum_{j=0}^{m} b_j q^j.$$

Widerspruch!
2. Wir zeigen die Existenz per Induktion nach n.
Induktionsanfang $n = 0$: Man setze $a_j(0) := 0$ für $j \in \mathbb{N}_0$.
Induktionsschritt $r < n \to n$: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $q^k \leq n < q^{k+1}$. Nach Division mit Rest existieren $0 < a < q$ und $0 \leq r < q^k$ mit

$$n = aq^k + r,$$

[48] A kann als Menge der Ziffern interpretiert werden, eine Art Alphabet der Zahlen.

also insbesondere $r < n$. Nach Induktionsvoraussetzung (die Behauptung gilt für jedes $r < n$) existiert eine Folge $\big(a_j(r)\big)$ mit

$$r = \sum_{j=0}^{d(r)} a_j(r) q^j .$$

Wegen $r < q^k$ ist $d(r) < k$. Setzt man $a_j(n) := a_j(r)$ für $j \neq k$ und $a_k(n) := a$, so ist $n = \sum_{j=0}^{d(n)} a_j(n) q^j$ mit $d(n) = k$. □

Man nennt $(a_{d(n)}(n) a_{d(n)-1}(n) \ldots a_0(n))_q$ die **q-adische Darstellung** von n. Im Falle $q = 2$ spricht man dann von der **Binärdarstellung**, im Falle $q = 2{\cdot}5$ von der **Dezimaldarstellung** und im Falle $q = 2^4$ von der **Hexadezimaldarstellung**.[49] Schließlich schreibt man im Dezimalfall auch kurz $a_{d(n)}(n) \ldots a_0(n)$ statt $(a_{d(n)}(n) \ldots a_0(n))_{2\cdot 5}$. So ist etwa für $n = 8 + 8 + 7$

$$n = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (10111)_2$$

und

$$n = 2 \cdot (2 \cdot 5)^1 + 3 \cdot (2 \cdot 5)^0 = (23)_{2\cdot 5} = 23 .$$

Definition B.3 Eine Relation $\sim$ auf X heißt **Äquivalenzrelation**, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(A1) $x \sim x$ (Reflexivität),

(A2) aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (Symmetrie),

(A3) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (Transitivität).

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, so heißt $[x] := [x]_\sim := \{x' \in X : x \sim x'\}$ die von x erzeugte **Äquivalenzklasse** und jedes $x' \in [x]$ ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse $[x]$. Außerdem heißt $X/_\sim := \big\{[x] : x \in X\big\}$ **Quotientenmenge** von X (**modulo** $\sim$).

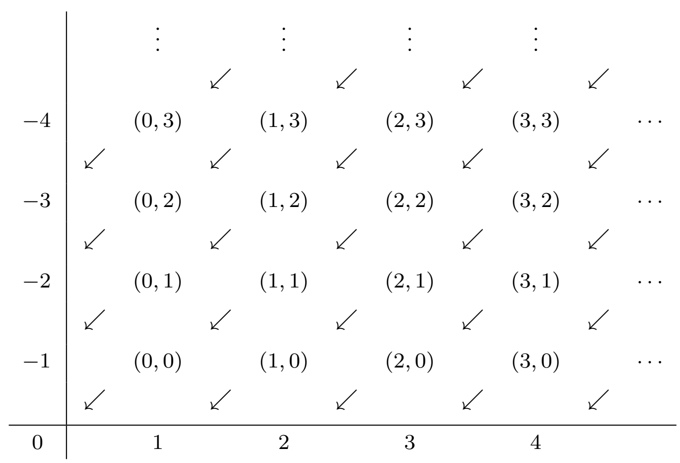
[49] Die Schreibweise $q = 2 \cdot 5$ beziehungsweise $q = 2^4$ mag umständlich erscheinen, ist aber nicht durch $q = 10$ beziehungsweise $q = 16$ ersetzbar, da dies schon die zu definierende Dezimaldarstellung vorwegnehmen würde.

Bemerkung und Definition B.4 Es sei $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Durch $(a, b) \sim (a', b')$ falls $a + b' = b + a'$ für $a, b, a', b' \in \mathbb{N}_0$ ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Ist $a \geq b$, so existiert (genau) ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a = b + n$ und es gilt damit

$$[(a, b)] = \{(k + n, k) : k \in \mathbb{N}_0\} = [(n, 0)] \ .$$

Ist $a < b$, so ist $b = a + m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und damit

$$[(a, b)] = \{(k, k + m) : k \in \mathbb{N}_0\} = [(0, m)].$$



Definiert man die Menge $\mathbb{Z}$ der **ganzen Zahlen** als

$$\mathbb{Z} := X/_\sim = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/_\sim \ ,$$

so sind durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)] \quad \text{und} \quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$$

Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$ (unabhängig von der Wahl der jeweiligen Repräsentanten) definiert, mit denen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ zu einem kommutativen Ring wird. Dabei gilt $[(0, n)] = -[(n, 0)]$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Indem man n mit $[(n, 0)]$ identifiziert, ist $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{Z}$ eingebettet, und es ergibt sich

$$[(a, b)] = [(a, 0)] + [(0, b)] = [(a, 0)] - [(b, 0)] = a - b \quad (a, b \in \mathbb{N}_0).$$

Außerdem ist damit durch $a - b < c - d$ definitionsgemäß genau dann, wenn $a + d < b + c$ für $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ eine Erweiterung der Ordnung $<$ von $\mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Bemerkung und Definition B.5 Es sei $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Definiert man $(a, b) \sim (a', b')$ falls $ab' = ba'$ für $(a, b), (a', b') \in X$, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Man kann zeigen: Für $(a, b) \in X$ existieren teilerfremde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ mit

$$[(a, b)] = \{(mp, mq) : m \in \mathbb{Z}^*\} = [(p, q)].$$

Definiert man die Menge $\mathbb{Q}$ der **rationalen Zahlen** als

$$\mathbb{Q} := X/_\sim = \big(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\big)/_\sim$$

und Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + cb, bd)] \quad \text{und} \quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac, bd)],$$

so wird $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ zu einem Körper. Dabei gilt $1/[(a, b)] = [(b, a)]$ für $a \neq 0$. Durch Identifikation von a und $[(a, 1)]$ ist wieder $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ eingebettet und es gilt

$$[(a, b)] = [(a, 1)] \cdot [(1, b)] = \frac{[(a, 1)]}{[(b, 1)]} = \frac{a}{b} \qquad ((a, b) \in X).$$

Schließlich erweitert die Definition $a/b < c/d$ falls $ad < bc$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}$ (also $b, d > 0$) die Ordnung $<$ von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$.

Wir skizzieren zum Abschluss einen möglichen konstruktiven Zugang zu den reellen Zahlen, der an die q-adische Darstellung natürlicher Zahlen anschließt. Basis ist die folgende Beobachtung ([Ü]): Sind $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq k$, so gilt

$$\sum_{j=k}^{n-1} a_j q^j \leq q^n - q^k \tag{B.1}$$

für beliebige $a_j \in \{0, \ldots, q-1\}$. Insbesondere ist für $k < 0$ mit $m := -k$

$$\frac{a_{-1}}{q} + \frac{a_{-2}}{q^2} + \ldots + \frac{a_{-m}}{q^m} = \sum_{j=-m}^{-1} a_j q^j \leq 1 - \frac{1}{q^m} < 1.$$

Bemerkung und Definition B.6 Es seien $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ und $A := \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Wir betrachten die Menge der nach oben abbrechenden zweiseitigen Folgen

$$A^{\mathbb{Z})} := \{(a_j) = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}} : \text{es existiert ein } d \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } a_j = 0 \text{ falls } j > d\}.$$

Man schreibt statt $(a_j) \in A^{\mathbb{Z})}$ komprimierter und suggestiver

$$(a_d a_{d-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots)_q = a_d a_{d-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$$

und spricht von einer q-adischen Folge. Im Fall $q = 2$ spricht man von **Binärfolge** und im Fall $q = 2 \cdot 5$ von **Dezimalfolge**. Wir setzen

$$A^{(\mathbb{Z})} := \{(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z})} : \text{es existiert ein } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } a_j = 0 \text{ falls } j < -m\}$$

und nennen (a_j) **abbrechend**, falls $(a_j) \in A^{(\mathbb{Z})}$ gilt. Aus (B.1) sieht man wie beim Beweis der Eindeutigkeit in Satz B.2, dass die Abbildung

$$A^{(\mathbb{Z})} \ni (a_j) \mapsto \sum_{j=-m}^{d} a_j q^j \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$$

injektiv ist. Wir identifizieren im Weiteren die abbrechende Folge (a_j) mit der entsprechenden rationalen Zahl. Weiter definiert man auf $A^{\mathbb{Z})}$ eine Äquivalenzrelation durch $(a_j) \sim (b_j)$ genau dann, wenn $(a_j) = (b_j)$ oder wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ so existiert, dass $a_j = b_j$ für $j > k$, $a_k = b_k + 1$ sowie $a_j = 0$ und $b_j = q - 1$ für $j < k$ (oder entsprechend mit vertauschten Rollen von a_j und b_j). Damit sind alle Äquivalenzklassen entweder ein- oder zweielementig, wobei im zweielementigen Fall eine der beiden Folgen abbrechend ist.

Bemerkung B.7 Wir betrachten ab jetzt den Fall $q = 2$ und definieren

$$X := \{x = [(a_j)] : (a_j) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z})}\}.$$

Wählt man im Fall zweielementiger $[(a_j)]$ die abbrechende Folge als Repräsentant, so entspricht jedem $x \in X$ genau eine Binärfolge (a_j). Wenn nichts anderes gesagt ist, legen wir uns auf diese Darstellung fest und schreiben dann auch $x = (a_j)$. Ist $x = (a_j)$ (in diesem Sinne), so nennen wir für $k \in \mathbb{Z}$ [50]

$$\lfloor x \rfloor_k := \sum_{j \geq k} a_j 2^j \in 2^k \mathbb{N}_0$$

die k-te Abschneidung von x. Unter Verwendung der Relation $<$ auf $\mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ definieren wir eine Relation $<$ auf X durch $x < y$ genau dann, wenn $\lfloor x \rfloor_k < \lfloor y \rfloor_k$ für ein k $\in \mathbb{N}_0$

[50] Ist $\cdot$ eine Verknüpfung auf einer Menge M, so schreiben wir für $B \subset M$ und $a \in M$ kurz $aB := \{ab : b \in B\}$.

gilt. Ist dies der Fall, so folgt $\lfloor x \rfloor_n < \lfloor y \rfloor_n$ für alle $n \leq k$ aus (B.1). und damit sieht man, dass $(X, <)$ geordnet ist. Wesentlich ist nun, dass $(X, <)$ *vollständig* ist.
Wir deuten den Beweis der Vollständigkeit an. Es sei dazu $M \subset X$ nichtleer und nach oben beschränkt und ohne Einschränkung $M \neq \{0\}$. Wir definieren rekursiv eine Binärfolge (b_j): Zunächst folgt aus der Beschränktheit nach oben von M die Beschränktheit nach oben von

$$\{k \in \mathbb{Z} : \lfloor x \rfloor_k \neq 0 \text{ für ein } x \in M\}$$

in $\mathbb{Z}$. Ist d das Maximum dieser Menge, so setzen wir $b_d := 1$ und $b_j := 0$ für $j > d$. Weiter definieren wir

$$b_{d-1} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor_{d-1} > 2^d \text{ für ein } x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und entsprechend für $n \in \mathbb{N}$

$$b_{d-n-1} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor_{d-n-1} > 2^d + b_{d-1}2^{d-1} + \ldots + b_{d-n}2^{d-n} \text{ für ein } x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $s := [(b_j)]$, so ergibt sich $s = \sup M$ aus der Konstruktion von s.

Bemerkung B.8 Nun wollen wir in X rechnen. Zunächst setzt man $0 := [(0)_{j\in\mathbb{Z}}]$ und $1 := [(\delta_{j,0})_{j\in\mathbb{Z}}]$. Die Existenz von Suprema ermöglicht es, die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von $A^{(\mathbb{Z})}$ auf X zu erweitern: Für $x, y \in X$ existieren nämlich

$$x + y := \sup\left\{\lfloor x \rfloor_k + \lfloor y \rfloor_k : k \in \mathbb{Z}\right\} \in X$$

und

$$x \cdot y := \sup\left\{\lfloor x \rfloor_k \cdot \lfloor y \rfloor_k : k \in \mathbb{Z}\right\} \in X.$$

Die Kommutativität ist klar. Das Hauptproblem besteht darin, zu zeigen, dass $+$ assoziativ ist und dass $(X \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine Gruppe ist. Ist dies getan, so sieht man wie bei der Erweiterung von $\mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{Z}$, dass durch $(a, b) \sim (a', b')$ falls $a + b' = b + a'$ für $(a, b), (a', b') \in X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf $X \times X$ definiert ist. Damit setzt man

$$\mathbb{R} := (X \times X)/_\sim$$

und schreibt wieder $a - b$ statt $[(a, b)]$ und im Falle $b = 0$ kurz a sowie im Falle $a = 0$ kurz $-b$. Die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ sowie die Relation $<$ übertragen sich wie im Fall der ganzen Zahlen auf $\mathbb{R}$, und zwar so, dass damit $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ ein vollständig geordneter Körper wird.[51] Dabei ist $\mathbb{Q}$ monoton eingebettet in $\mathbb{R}$, das heißt, es existiert eine injektive Abbildung $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ so, dass $j(x+y) = j(x)+j(y)$ und $j(xy) = j(x)j(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt und dass $j(x) < j(y)$ genau dann gilt, wenn $x < y$ ist. Indem man $j(x)$ mit x identifiziert, kann man $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen. Man kann zeigen, dass in diesem Sinne den rationalen Zahlen die sogenannten periodischen Binärfolgen entsprechen.

Bemerkung B.9 Man kann zeigen, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist ([Ü]; Stichwort: zweites Cantorsches Diagonalverfahren).

[51] In der Literatur findet man neben axiomatischen Zugängen oft den konstruktiven Zugang über *Dedekindsche Schnitte*. Der Vorteil dieses Zugangs liegt in einer einfacheren Definition des Supremums und einem weniger aufwändigen Nachweis der Körperaxiome, allerdings sind die dabei betrachteten Objekte, die am Ende als reelle Zahlen bezeichnet werden, weniger instruktiv als die oben eingeführten Binärfolgeen. Außerdem knüpft die Vorstellung einer reellen Zahl als Binärfolge meist an die Vorkenntnisse aus der Schule an und deutet zudem Problematiken der Gleitkommaarithmetik und der Struktur der Maschinenzahlen an.

C Metrische Räume

Für die Analysis ist das Konzept der Grenzwerte von zentraler Bedeutung. Dabei ist es wesentlich, von Abständen zwischen zwei Elementen in einer Menge sprechen zu können. Wir betrachten nun ganz allgemein Mengen, in denen ein Abstand zwischen jeweils zwei Elementen definiert ist.

Definition C.1 Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** (oder **Abstand**) auf X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(D1) (Definitheit) Für $x, y \in X$ ist $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) > 0$, falls $x \neq y$.

(D2) (Symmetrie) Für $x, y \in X$ ist $d(x, y) = d(y, x)$.

(D3) (Dreiecksungleichung) Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Das Paar (X, d) heißt dann **metrischer Raum**. Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $M \subset X$ nichtleer, so ist durch $d_M := d|_{M\times M}$ eine Metrik auf M gegeben. Man nennt d_M die **Spurmetrik** von d auf M.

Bemerkung und Definition C.2 1. Auf $\mathbb{K}$ ist durch

$$d(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{K})$$

eine Metrik gegeben (die Dreiecksungleichung aus Satz 2.17 impliziert die Dreiecksungleichung für d). Man spricht von der **Betragsmetrik**. Entsprechend ist im euklidschen Raum $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mit der Länge

$$\|(z, u)\| := \sqrt{|z|^2 + u^2} = \sqrt{s^2 + t^2 + u^2} \qquad (z = (s, t) \in \mathbb{C},\ u \in \mathbb{R})$$

durch

$$d((z, u), (w, v)) := \|(z, u) - (w, v)\| \qquad ((z, u),\ (w, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R})$$

eine Metrik definiert ([Ü]).

2. Ist $X \neq \varnothing$ eine beliebige Menge, so definiert

$$\delta(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x = y \\ 1, & \text{falls} \quad x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X, die sogenannte **diskrete Metrik**. Insbesondere kann also jede nichtleere Menge mit einer Metrik versehen werden.

Bemerkung und Definition C.3 Wir ergänzen die komplexe Ebene durch einen Punkt, den wir ω nennen, und setzen

$$\mathbb{C}_\omega := \mathbb{C} \cup \{\omega\}.$$

Wir wollen $\mathbb{C}_\omega$ mit einer Metrik versehen. Dazu sei $\|\cdot\|$ die euklidsche Länge im Raum $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ und mit $0 = 0_\mathbb{C}$

$$S := \{(w,u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \|(w,u) - (0,1/2)\| = 1/2\}$$

die 2-Sphäre mit Mittelpunkt $(0,1/2)$ und Radius $1/2$. Dann ist durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{1+|z|^2}(z, |z|^2) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

eine Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $S \setminus \{(0,1)\}$ definiert ([Ü]).[52] Mit $\varphi(\omega) := (0,1)$ ist also $\varphi : \mathbb{C}_\omega \to S$ surjektiv.

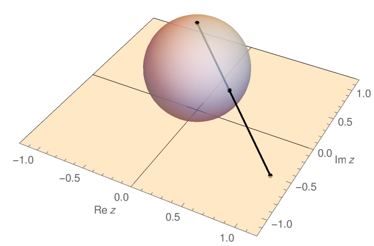


Abbildung 17: stereographische Projektion.

Man kann nachrechnen, dass für $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}_\omega$

$$\|\varphi(z) - \varphi(z')\| = \begin{cases} |z - z'|/\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}, & \text{falls } z' \in \mathbb{C} \\ 1/\sqrt{1+|z|^2}, & \text{falls } z' = \omega \end{cases} \tag{C.1}$$

gilt ([Ü]). Insbesondere ist damit φ bijektiv und durch $\chi(z,z') := \|\varphi(z) - \varphi(z')\|$ eine Metrik auf $\mathbb{C}_\omega$ definiert, genannt die **chordale Metrik**. Die Umkehrabbildung φ^{-1} von φ heißt **stereographische Projektion** und ist gegeben durch

$$\varphi^{-1}(w,u) = \begin{cases} w/(1-u), & \text{falls } u \neq 1 \\ \omega, & \text{falls } u = 1 \end{cases}.$$

[52] Geometrisch ergibt sich der Punkt $\varphi(z)$ als der Schnittpunkt der Sphäre S mit der Strecke zwischen den Punkten $(0,1)$, also dem Nordpol der Sphäre, und dem Punkt $(z,0)$.

Definition C.4 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.
1. Für $a \in X$ und $0 < \rho \leq +\infty$ setzen wir

$$U_\rho(a) := U_{\rho,d}(a) := U_{\rho,X}(a) := \{x \in X : d(x,a) < \rho\}.$$

Man spricht dann von der (offenen) **ρ-Umgebung** von a. Weiter setzen wir

$$\dot{U}_\rho(a) := \dot{U}_{\rho,d}(a) := \{x \in X : 0 < d(x,a) < \rho\}.$$

Damit heißt a ein **Häufungspunkt** von M, falls $M \cap \dot{U}_\rho(a) \neq \varnothing$ für alle $\rho > 0$ ist. Wir schreiben M' für die Menge der Häufungspunkte von M in X.
2. Sind $a \in X$ und $M \subset X$, so heißt a ein **innerer Punkt** von M (im metrischen Raum (X, d)), falls ein $\rho > 0$ existiert mit $U_\rho(a) \subset M$. In diesem Fall heißt zudem M eine **Umgebung** von a (im Raum (X, d)). Die Menge M heißt **offen**, falls jeder Punkt von M innerer Punkt ist, und abgeschlossen, falls $X \setminus M$ offen ist. Mit der Dreiecksungleichung sieht man, dass $U_\rho(a)$ offen ist ([Ü]).

Satz C.5 *Ist (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$, so ist M genau dann abgeschlossen, wenn $M' \subset M$ gilt.*

Beweis. Ist M abgeschlossen, also $M^c = X \setminus M$ offen, $a \in M'$ und $\delta > 0$, so ist $(U_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap M \neq \varnothing$. Damit ist a kein innerer Punkt von M^c, also $a \notin M^c$.
Ist umgekehrt $M' \subset M$ und $x \in M^c$, so ist $x \notin M'$, also $U_\delta(x) \cap M = \varnothing$ für ein $\delta > 0$. Damit ist x innerer Punkt von M^c. □

Bemerkung C.6 Man sieht leicht, dass beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen offen sind, und dass beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind ([Ü]).

Bemerkung und Definition C.7 Es seien (X, d_X) und (Y, d) metrische Räume und $f : X \to Y$. Ist $a \in X$, so heißt f **stetig** an der Stelle $a \in X$, falls zu jeder offenen Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a existiert mit $f(U) \subset V$.[53] Weiterhin heißt f stetig auf $M \subset X$, falls f stetig in jedem Punkt $a \in M$ ist und kurz stetig, falls f stetig auf X ist.

[53] Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle $x \in U_{\delta,X}(a)$.

Satz C.8 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Ist $f : X \to Y$, so ist f genau dann stetig, wenn für alle offenen Mengen $V \subset Y$ die Urbildmenge $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist.*[54]

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei $V \subset Y$ offen. Ist $a \in f^{-1}(V)$, so ist V eine offene Umgebung von $f(a)$. Da f stetig an a ist, existiert eine Umgebung U von a mit $f(U) \subset V$, also $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$. Damit ist $f^{-1}(V)$ offen.
$\Leftarrow$: Es seien $a \in X$ und V eine offene Umgebung von $f(a)$. Nach Voraussetzung ist $U := f^{-1}(V)$ offen in X. Da $a \in U$ gilt, ist U eine Umgebung von a mit $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$. Also ist f stetig an a. $\square$

Wir untersuchen nun Folgen in metrischen Räumen.

Bemerkung und Definition C.9 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in N}$ in X heißt d-**konvergent** oder kurz **konvergent**, falls die Metrik aus dem Kontext heraus klar ist, falls ein $c \in X$ so existiert, dass $(d(x_n, c))_{n\in N}$ eine Nullfolge (in $\mathbb{R}$) ist. Mit der Dreiecksungleichung und (D1) sieht man, dass c eindeutig bestimmt ist. Wir nennen c den d-**Grenzwert** oder kurz **Grenzwert** und schreiben dann $x_n \to c$ für $n \to \infty$ (in (X, d)) oder auch

$$\lim x_n := \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n := c.$$

Bemerkung C.10 Man sieht mit (C.1) leicht: Ist (z_n) eine Folge in $(\mathbb{C}_\omega, \chi)$, so gilt $z_n \to a \in \mathbb{C}$ in (C_ω, χ) genau dann, wenn $z_n \to a$ in $\mathbb{C}$ mit der Betragsmetrik, und $z_n \to \omega$ genau dann, wenn $|z_n| \to +\infty$ gilt. Insbesondere ist die Folge (n) in $(\mathbb{C}_\omega, \chi)$ konvergent mit $\lim n = \omega$.

Bemerkung und Definition C.11 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $(x_n)_{n\in N}$ eine Folge in X, so heißt $(x_n)_{n\in N}$ eine **Cauchyfolge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert mit

$$d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon \qquad (n, n' > R).$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

[54] Durch Komplementbildung sieht man, dass dies auch äquivalent dazu ist, dass Urbilder abgeschlossener Mengen stets abgeschlossen sind.

Bemerkung C.12 Ist $X = (0, \infty)$ mit der Betragsmetrik, so ist die Folge $(1/n)$ eine Cauchyfolge in X, aber nicht konvergent in X. Im Allgemeinen sind also in metrischen Räumen nicht alle Cauchyfolgen konvergent!

Bemerkung und Definition C.13 Ein metrischer Raum (X, d) heißt **folgenkompakt** oder kurz **kompakt**, falls jede Folge eine konvergente Teilfolge hat. Weiter heißt (X, d) **folgenvollständig** oder kurz **vollständig**, falls jede Cauchyfolge konvergent ist.
Ist (x_n) eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge hat, so ist (x_n) konvergent.

> Denn: Es sei $(x_n)_{n\in J}$ eine Teilfolge mit $x_n \to c$ für $n \in J$ und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $R > 0$ mit $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon/2$ für $n, n' > R$. Weiter existiert ein $j \in J$ so, dass $j > R$ und $d(x_j, c) < \varepsilon/2$. Damit ist $d(x_n, c) \leq d(x_n, x_j) + d(x_j, c) < \varepsilon$ für $n > R$. Also gilt $x_n \to c$.

Damit ist jeder kompakte Raum vollständig.

Bemerkung C.14 1. In $\mathbb{K}$ ist jede Cauchyfolge beschränkt.

> Denn: Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $n_0 \in N$ so, dass $|x_n - x_{n'}| < 1$ für alle $n, n' \in N$ mit $n, n' \geq n_0$, also auch $|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < |x_{n_0}| + 1$ für alle $n \in N$ mit $n \geq n_0$. Da $\{n \in N : n < n_0\}$ endlich ist, ist (x_n) beschränkt.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass ist $\mathbb{K}$ mit der Betragsmetrik ein vollständiger metrischer Raum.[55]
2. Ist $X \subset \mathbb{K}$, so ist X mit der Betragsmetrik nach dem Satz von Heine-Borel genau dann ein kompakter Raum, wenn X beschränkt und abgeschlossen ist. Aus Bemerkung C.10 ergibt sich damit auch, dass $(\mathbb{C}_\omega, \chi)$ ein kompakter Raum ist.[56]

Satz C.15 *Es seien (X, d_X) ein kompakter und (Y, d) ein metrischer Raum. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ mit der Spurmetrik von d ebenfalls kompakt.*

[55] Die Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen impliziert über den Satz von Bolzano-Weierstraß die Folgenvollständigkeit von $\mathbb{K}$.
[56] Man spricht auch von einer Einpunkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$.

Beweis. Es sei (y_n) eine Folge in $f(X)$. Wir wählen $x_n \in X$ mit $y_n = f(x_n)$. Da X kompakt ist, existieren ein $a \in X$ und eine Teilfolge $(x_n)_{n\in I}$ von (x_n) mit $x_n \to a$ für $n \in I$. Da f stetig ist, folgt $y_n = f(x_n) \to f(a) \in f(X)$ für $n \in I$. □

Bemerkung und Definition C.16 Sind (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) metrische Räume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig, so folgt wegen $(g \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(g^{-1}(M))$ für $M \subset Z$ mit Satz C.8, dass die Komposition $g \circ f$ ebenfalls stetig ist .
Eine stetige, bijektive Funktion $f : X \to Y$, für die f^{-1} ebenfalls stetig ist, nennt man einen **Homöomorphismus**. Wieder aus Satz C.8 folgt, dass f^{-1} genau dann stetig ist, wenn $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ für alle offenen $U \subset X$ offen ist.[57]
Ist $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist nach Bemerkung 3.33 jede stetige, injektive Funktion $X \to \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus auf ihr Bildintervall $W(f)$.

Beispiel C.17 Wir betrachten $X = [-1, 0) \cup [1, 2]$ und die Funktion $f : X \to [-1, 1]$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [-1, 0) \\ x - 1, & \text{falls } x \in [1, 2] \end{cases} .$$

Dann ist f stetig, streng wachsend und surjektiv, also auch bijektiv, und es gilt

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{falls } y \in [-1, 0) \\ y + 1, & \text{falls } y \in [0, 1] \end{cases} .$$

Dabei ist f^{-1} nicht stetig, also f kein Homöomorphismus.

Satz C.18 *Es seien (X, d_X) ein kompakter und (Y, d) ein metrischer Raum. Ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, so ist (Y, d) kompakt und f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Zunächst ist $Y = f(X)$ nach Satz C.15 kompakt.
Durch Komplementbildung sieht man mit Bemerkung und Definition C.16, dass f^{-1} genau dann stetig ist, wenn $f(A)$ für alle abgeschlossenen $A \subset X$ abgeschlossen ist. Es sei also $A \subset X$ abgeschlossen. Da (X, d_X) ein kompakter Raum ist, ist auch A mit der

[57] Abbildungen, für die alle Bilder offener Mengen offen sind, nennt man offene Abbildungen.

Spurmetrik ein kompakter Raum. Nach Satz C.15 ist $f(A)$ mit der Spurmetrik von d kompakt. Dann ist insbesondere $f(A)$ abgeschlossen in X. $\square$

Bemerkung und Definition C.19 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt X **zusammenhängend**, falls gilt: Sind $U, V \subset X$ offen mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \varnothing$, so ist $U = \varnothing$ oder $V = \varnothing$. Dies ist äquivalent dazu, dass X und $\varnothing$ die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Der folgende Satz zeigt, dass sich der Zusammenhang einer Menge unter stetigen Abbildungen auf die Bildmenge überträgt.

Satz C.20 *Es seien (X, d_X), (Y, d) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ [58] zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $B \subset f(X)$ offen und abgeschlossen. Aus der Stetigkeit von f folgt mit Satz C.8, dass $f^{-1}(B)$ offen und abgeschlossen in (X, d_X) ist. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}(B) = \varnothing$ oder $f^{-1}(B) = X$. Im ersten Fall ist $B = \varnothing$ und im zweiten gilt $f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, also $B = f(X)$. Damit ist $f(X)$ zusammenhängend. $\square$

Satz C.21 *Eine nichtleere Teilmenge X von $\mathbb{R}$ ist genau dann ein zusammenhängender Raum, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei $X \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann existieren Punkte a, b, c mit $a < c < b$ und $a, b \in X$, $c \notin X$. Für die nichtleeren und in X offenen Mengen

$$U := (-\infty, c) \cap X \quad \text{und} \quad V := (c, \infty) \cap X$$

gilt dann $X = U \cup V$ und $U \cap V = \varnothing$. Also ist X unzusammenhängend.
$\Leftarrow$: Es seien U, V nichtleere und in X offene Mengen mit $U \cap V = \varnothing$. Wir müssen zeigen, dass $X \neq U \cup V$ ist.

[58] mit der Spurmetrik von d

Es seien $a \in U$, $b \in V$. Dann ist $a \neq b$ (und dann ohne Einschränkung $a < b$). Da X ein Intervall ist, gilt $[a, b] \subset X$. Wir setzen

$$\xi := \sup(U \cap [a, b]) \in X.$$

Da V offen ist, ist $\xi < b$ und da U offen ist, ist dann $\xi \notin U$. Insbesondere ist $\xi > a$. Angenommen, es ist $\xi \in V$. Wegen der Offenheit von V existiert dann ein $c \in (a, \xi)$ mit $(c, b] \subset V$. Nach Definition des Supremums ist $(c, \xi] \cap U \neq \varnothing$ und damit $U \cap V \neq \varnothing$. Widerspruch. Damit ist $\xi \notin U \cup V$. □

Durch Kombination der Aussagen von Satz C.21 und Satz C.20 erhalten wir folgende wesentliche Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes:

Satz C.22 *Es sei (X, d) ein zusammenhängender metrischer Raum. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ ein Intervall.*

Bemerkung und Definition C.23 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \to X$ nennt man einen **Weg** mit **Anfangspunkt** $f(0)$ und **Endpunkt** $f(1)$. Eine Menge $K \subset X$ heißt **Kurve**, falls ein Weg f existiert mit $K = W(f)$ und dann nennt man f eine Parametrisierung der Kurve. Nach Satz C.21 und Satz C.20 sind Kurven zusammenhängend (und nach Satz C.15 auch kompakt).

Beispiel C.24 Wir betrachten den Weg $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit

$$f(t) := 1 - 2t + 2\mathrm{i}\sqrt{t(1-t)} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Hier ist $W(f) = \mathbb{S} \cap \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ der obere Halbkreisbogen ([Ü]).

Bemerkung C.25 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Sind $A_\alpha \subset X$ für $\alpha \in I$ zusammenhängend (mit der Spurmetrik) und so, dass $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = X$ und $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \varnothing$, so ist auch X zusammenhängend.

> Denn: Es seien U und V in X offene nichtleere Mengen mit $X = U \cup V$. Wir müssen zeigen, dass $U \cap V \neq \varnothing$ ist. Dazu sei $a \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ und ohne Einschränkung $a \in U$. Dann ist $a \in A_\alpha \cap U$ für alle $\alpha \in I$. Wegen $V \neq \varnothing$ existiert ein $\alpha = \alpha_V \in I$ mit $A_\alpha \cap V \neq \varnothing$. Da A_α zusammenhängend ist, $(A_\alpha \cap U) \cup (A_\alpha \cap V) = A_\alpha$ gilt und $A_\alpha \cap U$ sowie $A_\alpha \cap V$ nichtleer und offen in A_α sind, folgt $A_\alpha \cap U \cap V \neq \varnothing$.

Bemerkung und Definition C.26 Ein metrischer Raum (X, d) heißt **wegzusammenhängend**, falls zu jedem Paar $(x, y) \in X \times X$ ein Weg von x nach y existiert, d. h. ein stetiges $f : [0, 1] \to X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$. Ist X ein wegzusammenhängender Raum, so X auch zusammenhängend.

> Denn: Wir wählen $a \in X$. Dann existiert zu jedem $x \in X$ ein Weg f_x mit Anfangspunkt a und Endpunkt x. Damit ist $X = \bigcup_{x \in X} W(f_x)$ und $a \in \bigcap_{x \in X} W(f_x)$. Nach Bemerkung C.25 ist X zusammenhängend

D Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Wichtige Funktionen wie die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen sind über gewisse Reihenwerte definiert. Ziel des Abschnitts ist es, allgemeine Strukturaussagen über Funktionen zu machen, die sich als Grenzwerte sogenannter Funktionenfolgen oder -reihen ergeben.

Definition D.1 Es seien $X \neq \varnothing$ eine Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(f_n)_{n \in N}$ in $\mathrm{Abb}(X, Y)$ nennt man eine **Funktionenfolge**. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in N}$ heißt **punktweise konvergent** auf der Menge $M \subset X$, falls für alle $x \in M$ die Folge $(f_n(x))_{n \in N}$ in Y konvergiert, d. h. falls eine Funktion $f : M \to Y$ so existiert, dass die Folge $\big(d(f_n(x), f(x))\big)_{n \in N}$ in $[0, \infty)$ für jedes $x \in M$ abklingend ist. Die (eindeutig bestimmte) Funktion f heißt **Grenzfunktion** der Folge $(f_n)_{n \in N}$ (auf M). Wir schreiben dann auch

$$f_n \to f \qquad \text{punktweise auf } M.$$

Beispiel D.2 Wir betrachten die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}) .$$

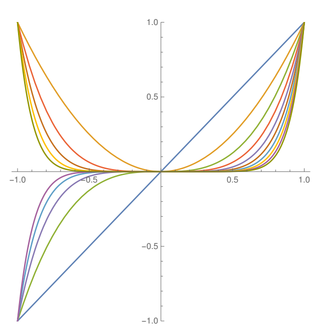


Abbildung 18: $x \mapsto x^n$ auf $[-1, 1]$ für $n = 1, \ldots, 10$.

Dann gilt

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls} \quad x \in (-1, 1) \\ 1 & , \quad \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \qquad ,$$

das heißt, (f_n) konvergiert punktweise auf $(-1, 1]$ gegen der Funktion $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \in (-1, 1)$ und $f(1) = 1$. Außerdem divergiert die Folge $(f_n(x))$ für alle anderen x. Das Beispiel zeigt insbesondere, dass die Grenzfunktion unstetig (an der Stelle 1) ist, obwohl alle Folgenglieder f_n stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind.

Wir führen nun einen strengeren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen ein, der den entscheidenden Vorteil hat, dass sich Stetigkeit auf die Grenzfunktion überträgt.

Bemerkung und Definition D.3 Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(f_n)_{n\in N}$ in $\mathrm{Abb}(X, Y)$ heißt **gleichmäßig konvergent** auf der Menge $M \subset X$, falls eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ so existiert, dass die Folge $(\sup_M d(f_n, f))_{n\in N}$ in $[0, \infty)$ abklingend ist. Wir schreiben dann

$$f_n \to f \quad \text{gleichmäßig auf } M$$

oder auch

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{gleichmäßig auf } M\ .$$

Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf M, so folgt wegen $d(f_n(x), f(x)) \leq \sup_M d(f_n, f)$ für alle $x \in M$ auch $f_n \to f$ punktweise auf M, mit anderen Worten: gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

Beispiel D.4 Wir betrachten wieder f_n und f aus Beispiel D.2. Ist $M = [-1/2, 1/2]$, so gilt

$$\sup_{x\in M} |x^n| = 1/2^n \to 0 \qquad (n \to \infty)\ ,$$

also $f_n \to 0\,(= f|_M)$ gleichmäßig auf M. Für $M = [0, 1)$ ist

$$\sup_M |f_n - f| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Also ist (f_n) nicht gleichmäßig konvergent auf M.

Wir kommen nun zu dem bereits angedeuteten Ergebnis über die Vererbung der Stetigkeit auf die Grenzfunktion.

Satz D.5 *Es seien (X,d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und (Y,d) ein metrischer Raum. Weiter sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathrm{Abb}(X,Y)$, die gleichmäßig auf einer Umgebung U von a gegen f konvergiert. Sind die Funktionen f_n stetig an a, so ist auch f stetig an a.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f auf U existiert ein $n = n_\varepsilon \in N$ mit

$$d(f(u), f_n(u)) < \varepsilon/3 \qquad (u \in U)\ .$$

Da f_n stetig an der Stelle a ist, existiert ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ so, dass $U_\delta(a) \subset U$ und

$$d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3 \qquad (x \in U_\delta(a))\ .$$

Damit gilt für $x \in U_\delta(a)$

$$d(f(x), f(a)) \le d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < \varepsilon\ .$$

□

Bemerkung und Definition D.6 Es seien $X \neq \varnothing$ eine Menge und

$$B(X) := B(X, \mathbb{C}) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ beschränkt}\}.$$

Dann ist durch

$$d_X(f,g) := \sup_X |f - g| \qquad (f, g \in B(X))$$

eine Metrik auf $B(X)$ gegeben ([Ü]).[59]

Satz D.7 *Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge. Dann ist $(B(X), d_X)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.*

[59]Wenn man normierte Räume kennt: Genauer ist auf $B(X)$ durch $\|f\|_X := \sup_X |f|$ eine Norm definiert. Man spricht von der Supremumsnorm. Damit ist d_X die von der Supremumsnorm induzierte Metrik.

Beweis. Es sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Cauchy-Folge in $B(X)$. Dann ist insbesondere für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_{n\in N}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, ist $(f_n(x))_{n\in N}$ konvergent. Also konvergiert (f_n) punktweise. Es sei $f : X \to \mathbb{C}$ die Grenzfunktion. Wir zeigen, dass (f_n) gleichmäßig auf X gegen f konvergiert.
Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $R = R_\varepsilon > 0$ mit $\sup_X |f_n - f_{n'}| < \varepsilon$ für $n, n' > R$. Wir wählen ein $n > R$. Ist $x \in X$, so ist die Abbildung $y \mapsto |f_n(x) - y|$ stetig (man beachte: $u \mapsto |u|$ ist stetig). Also gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \to |f_n(x) - f(x)| \qquad (m \to \infty)\ .$$

Aus $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für $m > R$ folgt $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, und da $x \in X$ beliebig war, ist damit auch $\sup_X |f - f_n| \le \varepsilon$.
Schießlich ist f beschränkt, denn wählt man ein $n \in N$ mit $\sup_X |f - f_n| < 1$, so gilt

$$|f(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \le 1 + \sup_X |f_n|$$

für alle $x \in X$. □

Definition D.8 Sind $X \neq \varnothing$ eine Menge und $(f_k)_{k\ge m}$ eine Folge in $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{C})$. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\ge m}$ der Partialsummen $s_n := \sum\limits_{\nu=m}^{n} f_k$ die mit (f_k) gebildete **Funktionenreihe**. Man schreibt wie bei Zahlenreihen $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f_k$ statt $(s_n)_{n\ge m}$. Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f_k$ heißt **punktweise konvergent** bzw. **gleichmäßig konvergent** auf $M \subset X$, falls die Funktionenfolge (s_n) auf M punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert. Man verwendet das Symbol $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f_k$ dann auch für die Grenzfunktion.

Der folgende Satz ist eine Erweiterung von Satz 4.7.

Satz D.9 *Es seien X eine Menge und $(f_k)_{k\ge m}$ eine Folge in $B(X)$ mit*

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sup_X |f_k| < \infty.$$

Dann konvergiert $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f_k$ gleichmäßig auf X.

Beweis. Mit f_k sind auch $s_n = \sum\limits_{k=m}^{n} f_k \in B(X)$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $R \geq m$ mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_X |f_k| < \varepsilon \qquad (n \geq R).$$

Damit folgt für $n' > n \geq R$

$$d_X(s_{n'}, s_n) = \sup_X \Big| \sum_{k=n+1}^{n'} f_k \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n'} \sup_X |f_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_X |f_k| < \varepsilon.$$

Damit ist (s_n) eine Cauchy-Folge in $B(X)$. Aus Satz D.7 ergibt sich die Konvergenz in $B(X)$, mit anderen Worten die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe. □

Bemerkung D.10 (**Weierstraß-Kriterium**) Es seien X eine Menge und $(f_k)_{k \geq m}$ eine Folge von Funktionen $f_k : X \to \mathbb{C}$. Aus Satz D.9 und dem Majorantenkriterium folgt: Existieren eine Folge $(b_k)_{n \geq N}$ mit $\sum\limits_{k=N}^{\infty} b_k < \infty$ und $|f_k(x)| \leq b_k$ für alle $x \in X$ und $k \geq N$, so ist die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent auf X.

Beispiel D.11 Wir betrachten die Funktionen $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f_k(z) := 1/k^z = \exp(-z \ln k) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Wegen der Stetigkeit von exp ist jedes f_k stetig. Ist $\alpha > 1$, so gilt ([Ü])

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha} < \infty \, .$$

Ist $M_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \alpha\}$, so gilt

$$|f_k(z)| = |\mathrm{e}^{-z \ln k}| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(z) \ln k} = 1/k^{\operatorname{Re}(z)} \leq 1/k^{\alpha} \quad (z \in M_\alpha,\ k \in \mathbb{N}).$$

Nach dem Weierstraß-Kriterium ist die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent auf M_α und damit punktweise auf $M := \bigcup_{\alpha > 1} M_\alpha$. Die Funktion $\zeta : M \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^z \qquad (z \in M),$$

heißt **(Riemannsche) Zetafunktion**. Ist $z \in M$ und $1 < \alpha < |z|$, so ist M_α eine Umgebung von z. Aus Satz D.5 folgt die Stetigkeit von ζ an z.

Definition D.12 Es seien $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $f_k(x) := c_k x^k$ für $x \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann nennt man die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ die mit der Folge (c_k) gebildete **Potenzreihe**. Weiter heißen

$$R := \sup\{s \geq 0 : \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ konvergent für } |x| \leq s\} \in [0, \infty]$$

der **Konvergenzradius** und $U_R(0)$ der **Konvergenzkreis** bzw. das **Konvergenzintervall** der Potenzreihe. Nach dieser Definition konvergiert die Potenzreihe punktweise auf $U_R(0)$.
Aus dem Quotientenkriterium folgt ([Ü]): Ist $c_k \neq 0$ für k genügend groß und gilt $|c_{k+1}/c_k| \to r$, so ist der Konvergenzradius $R = 1/r$ (mit $1/0 := \infty$ und $1/\infty := 0$).

Beispiel D.13 Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist eine Potenzreihe mit $c_k = 1$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Hier ist $R = 1$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

Die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

ist eine Potenzreihe mit $c_k = 1/k!$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und Konvergenzradius $R = \infty$.

Satz D.14 *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$*. Dann ist* $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k < \infty$ *für alle* $r < R$ *und die Potenzreihe gleichmäßig konvergent auf* $B_r(0)$*. Außerdem ist die Grenzfunktion* $f : U_R(0) \to \mathbb{C}$ *stetig.*

Beweis. Es sei $r < s < R$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$ konvergent. Also ist $(c_k s^k)$ eine Nullfolge und damit existiert ein N mit $|c_k| \leq 1/s^k$ für $k \geq N$. Mit $q := r/s$ ergibt sich

$$|f_k(x)| = |c_k|\,|x|^k \leq r^k/s^k = q^k \quad (|x| \leq r,\, k \geq N).$$

Wegen $q < 1$ ist $\sum\limits_{k=N}^{\infty} q^k < \infty$. Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k < \infty$ und aus dem Weierstraß-Kriterium folgt die gleichmäßige Konvergenz auf $B_r(0)$.
Es sei nun $x \in U_R(0)$ und $|x| < r < R$. Dann ist $B_r(0)$ eine Umgebung von x, und da Polynome stetig sind, ist die Grenzfunktion f nach Satz D.5 stetig an der Stelle x. □

Bemerkung und Definition D.15 Ist $X \subset \mathbb{K}$ offen, so heißt $f : X \to \mathbb{C}$ **analytisch an** $a \in X$, falls ein $R > 0$ und eine Folge $(c_k(a))$ in $\mathbb{C}$ so existieren, dass

$$(\sigma_a f)(h) := f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a) h^k \qquad (|h| < R)$$

gilt. Nach Satz D.14 ist f stetig auf $U_R(a)$. Außerdem sind mit f, g und $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\lambda f \pm g$ analytisch an a. Wie üblich heißt f kurz **analytisch**, falls f analytisch an jedem Punkt $a \in X$ ist. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, so heißt f kurz eine **ganze Funktion**.

Beispiel D.16 Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^n$ ganz, denn für $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$(a+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k \qquad (h \in \mathbb{C}).$$

Damit ist auch jedes Polynom ganz. Außerdem folgt aus

$$(\sigma_a \exp)(h) = \mathrm{e}^a \exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^a}{k!} h^k \qquad (h \in \mathbb{C}),$$

dass exp und damit auch sin und cos sowie cosh und sinh ganz sind. Weiterhin kann man zeigen ([Ü]), dass die rationale Funktion $z \mapsto 1/(1-z)$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ist.

Bemerkung D.17 Es sei f analytisch an der Stelle a und $(c_k(a))$ wie in Bemerkung und Definition D.15. Mit $\min \varnothing := \infty$ nennt man

$$\operatorname{ord}(a) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : c_k(a) \neq 0\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die **Ordnung** von a. Ist a eine Nullstelle von f, so ist $\operatorname{ord}(a) > 0$. Ist $\operatorname{ord}(a) = \infty$, so ist $c_k(a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also $f(a+h) = 0$ für $|h| < R$. Ist andererseits $n := \operatorname{ord}(a) < \infty$, so ist

$$f(a+h) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(a) h^k = h^n \varphi(h) \qquad (|h| < R)$$

mit
$$\varphi(h) := \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+n}(a)h^j .$$
Dabei ist $\varphi(0) = c_n(a) \neq 0$ und aus Stetigkeitsgründen daher $\varphi(h) \neq 0$ auf einer Umgebung U von 0. Also ist f nullstellenfrei auf einer Umgebung von a bis auf die (mögliche) Ausnahmestelle a. Damit sieht man: Ist $a \in Z(f)$, so ist entweder f lokal konstant $= 0$ an a [60] oder a ein isolierter Punkt von $Z(f)$.
Eine wichtige Folgerung ist, dass die Folge $(c_k(a))$ durch f eindeutig festgelegt ist, d. h. ist (b_k) eine Folge mit $f(a+h) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k h^k$ für $|h| < \rho$, so ist schon $b_k = c_k(a)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Eine zusammenhängende und offene Menge in einem metrischen Raum nennt man ein **Gebiet**.

Satz D.18 (Identitätssatz)
Es seien $G \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt: Hat $Z(f-g)$ einen Häufungspunkt in G, so ist schon $f = g$.

Beweis. Es reicht, die Behauptung für $g = 0$ zu beweisen (ansonsten betrachte man $f - g$ statt f).
Da $f : G \to \mathbb{C}$ stetig ist, ist $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen in G. Ist $A := Z(f)'$ die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ im metrischen Raum G, so ist $A \subset Z(f)$ nach Satz C.5 und A abgeschlossen in G. Ist $A \neq \varnothing$ und $a \in A$, so ist a nach Bemerkung D.17 ein innerer Punkt von A. Also ist A auch offen in G. Da G zusammenhängend ist, gilt schon $A = G$. Damit ist auch $Z(f) = G$, also $f = 0$. □

Der folgende (und abschließende) Satz besagt, dass Potenzreihen unter der Summe differenziert werden können, so wie Polynome.

Satz D.19 *Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Grenzfunktion f differenzierbar auf $U_R(0)$ und*
$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k\, z^{k-1} \qquad (|z < R) .$$

[60] f heißt lokal konstant an a, falls f auf einer Umgebung von a konstant ist.

Beweis. Es seien $z \in U_R(0)$ und $r < R$ mit $z \in U_r(0)$. Wir wählen ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subset U_r(0)$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi_n(h) := \frac{1}{h}\big((z+h)^n - z^n\big) = \sum_{k=0}^{n-1}(z+h)^k z^{n-k-1} \qquad (|h| < \delta)$$

(vgl. Beispiel 5.2). Dann ist $\varphi_n(0) = nz^{n-1}$ und wegen $|z+h| < r$ gilt $|\varphi_n(h)| \le nr^{n-1}$. Ist $r < s < R$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| s^{k-1} < \infty$ nach Satz D.14. Wegen $\sqrt[k]{k} \to 1$ ([Ü]) ist $k \le (s/r)^{k-1}$ für $k \ge N$ und damit auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k r^{k-1} < \infty.$$

Aus dem Weierstraß-Kriterium (Satz D.9) folgt damit die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ auf $U_\delta(0)$. Nach Satz D.5 ist die Funktion $\psi := \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ stetig an 0. Also gilt

$$\frac{\tau_z f(h)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(h) = \psi(h) \to \psi(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1}$$

für $h \to 0$. □

Bemerkung D.20 Aus Satz D.19 folgt, dass analytische Funktionen differenzierbar sind mit analytischer Ableitung. Insbesondere sind die Ableitungen ihrerseits wieder differenzierbar und analytisch.

Index