Die reduzierte QR-Zerlegung

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$ gibt es $Q \in \mathbb{K}^{m \times r}$ mit orthonormalen Spalten und $R \in \mathbb{K}^{r \times n}$ in Zeilenstufenform mit $A = QR$.

Der *Beweis* ist ein Algorithmus zur Berechnung einer Zerlegung. Wir wählen aus den Spalten $a_1, \ldots, a_n$ von A in folgender Weise r linear unabhängige aus: Zuerst sei $k_1 = \min\{k \in \{1, \ldots, n\} : a_k \neq 0\}$. Sind $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_s$ schon bestimmt, so sei

$$k_{s+1} = \min\{k \in \{k_s + 1, \ldots, n\} : a_k \notin \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_{k_s}\}\}.$$

Wegen $\operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\}) = r$ sind dann $\tilde{a}_1 = a_{k_1}, \ldots, \tilde{a}_r = a_{k_r}$ eine Basis von $\operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Seien $b_1, \ldots b_r$ die Orthonormalisierungen von $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r$ aus dem Gram-Schmidt-Verfahren und $Q = [b_1, \ldots, b_r] \in \mathbb{K}^{m \times r}$. Wegen

$$\operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_s\} = \operatorname{span}\{a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_s}\} = \operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_s}\}$$

können wir für $k \leq k_s$ die k-te Spalte von A als Linearkombination

$$a_k = \sum_{j=1}^{s} \varrho_{j,k} b_j$$

schreiben, wobei $\varrho_{j,k} = \langle b_j, a_k \rangle$, weil $b_1, \ldots, b_s$ eine Orthonormalbasis ihrer linearen Hülle bilden. Wegen $a_{k_s} \notin \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{s-1}\}$ ist außerdem $\varrho_{k_s,s} \neq 0$.

Definieren wir noch $\varrho_{j,k} = 0$ für $j \in \{s + 1, \ldots, r\}$, so ist die Matrix $R \in \mathbb{K}^{r \times n}$ mit den Einträgen $\varrho_{j,k}$ in Zeilenstufenform (weil jede Spalte mit mindestens so vielen Nullen endet wie die nachfolgenden) und es gilt $QR = A$, weil nach Definition des Matrixprodukts die k-te Spalte von QR das Produkt von Q mit der k-ten Spalte von R ist, also die Linearkombination aller Spalten von Q mit den Koeffizienten $\varrho_{j,k}$, die in der k-ten Spalte von R stehen. $\square$

Bemerkung. Da man die Koeffizienten $\varrho_{j,k} = \langle b_j, a_k \rangle$ sowieso ausrechnet, kann man sie auch zur Bestimmung von k_{s+1} benutzen: Hat man $b_1, \ldots, b_s$ schon bestimmt, so berechne man $\varrho_{j,k}$ für $j \leq s$ und $k \in \{k_s + 1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$k_{s+1} = \min\{k \in \{k_s + 1, \ldots, n\} : a_k \neq \sum_{j=1}^{s} \varrho_{j,k} b_j\}.$$

Für den Algorithmus muss man den Rang von A nicht im Vorhinein kennen. Er ergibt sich als das größte s, so dass k_s korrekt definiert ist (also nicht das Minimum der leeren Menge).