J. Wengenroth Wintersemester 2013/14
30.10.2013

Einführung in die Mathematik
Blatt 1
Abgabe: Mittwoch, 13.11.2013 bis 12 Uhr, Übungskasten 5

Anregungen für die Tutorien in der Woche vom 4. – 8. November

T 6
Seien A und B zwei Teilmengen von X mit $A \cup B = X$ und $f : A \to Y$ sowie $g : B \to Y$ zwei Abbildungen. Wann ist $f \cup g$ eine Abbildung? (Hier werden $f = \{(x, y)) \in A \times Y : f(x) = y\}$ und $g = \{(x, y) \in B \times Y : g(x) = y\}$ als Teilmengen von $X \times Y$ aufgefasst.)
Verallgemeinern Sie diese Aufgabe auf $X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ und $f_\alpha : A_\alpha \to Y$.

T 7
Seien R und S Relationen von X nach Y beziehungsweise Y nach Z. Was haben die reversen Relationen $\overleftarrow{R}$ und $\overleftarrow{S}$ mit $\overleftarrow{S \circ R}$ zu tun?

T 8
Für eine Abbildung $f : X \to Y$ und $B \subseteq Y$ heißt das Bild unter der reversen Relation $\overleftarrow{f}(B)$ auch Urbild von B unter f und wird üblicherweise mit $f^{-1}(B)$ bezeichnet. Zeigen Sie

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

und finden Sie Rechenregeln für die Urbilder von $B \cap C$, $B \cup C$, $B \setminus C$ und $B \triangle C$.

T 9
Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : Y \to Z$ genau dann injektiv ist, wenn für alle Funktionen $a, b : X \to Y$ folgende Implikation gilt:

$$f \circ a = f \circ b \Longrightarrow a = b$$

(Beim Beweis der Notwendigkeit der Injektivität helfen konstante Funktionen.)

T 10
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Funktionen.

(a) Sind f und g beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f.

(c) Folgt aus der Injektivität von $g \circ f$ immer die Injektivität von g?

Versuchen Sie (a) und (b) sowohl mit der Definition der Injektivität als auch mit Hilfe von T 9 zu lösen.

Hausaufgaben, Abgabe bis Mittwoch, 13. November

H 6
Zeigen Sie für Abbildungen $f : X \to Y$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) f ist injektiv.

(2) Für alle $A, B \subseteq X$ gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(3) Für alle $A \subseteq X$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$.

H 7
Zeigen Sie für Abbildungen $f : X \to Y$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) f ist surjektiv.

(2) Für alle Abbildungen $g, h : Y \to Z$ mit $g \circ f = h \circ f$ gilt $g = h$.

(3) Für alle $B \subseteq Y$ gilt $f(f^{-1}(B)) = B$.

H 8
Für eine Abbildung $f : X \to Y$ und $y \in Y$ heißt $\overleftarrow{f}[y] = \{x \in X : f(x) = y\}$ auch *Faser von f über y*.

(a) Zeigen Sie, dass die Fasern eine disjunkte Zerlegung von X bilden, das heißt

$$\overleftarrow{f}[y] \cap \overleftarrow{f}[\tilde{y}] = \emptyset \text{ für } y \neq \tilde{y} \text{ und } \bigcup_{y \in Y} \overleftarrow{f}[y] = X.$$

(b) Zeigen Sie andererseits, dass es für jede disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{y \in Y} F_y$ genau eine Abbildung $f : X \to Y$ gibt mit $\overleftarrow{f}[y] = F_y$ für alle $y \in Y$.

(c) Sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto nm$ die Multiplikationsabbildung. Welche Fasern haben genau ein oder genau zwei Elemente?

H 9
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Funktionen.

(a) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(c) Folgt aus der Surjektivität von $g \circ f$ immer die Surjektivität von g?

H 10
Für $A \subseteq X$ heißt $I_A : X \to \{0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ die *Indikatorfunktion* von A, und für zwei Mengen X und Y bezeichnen wir mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Zeigen Sie, dass

$$\Phi : \mathscr{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \{0, 1\}),\ A \mapsto I_A$$

eine bijektive Abbildung ist.
(Tipp: Für $f \in \mathrm{Abb}(X, \{0, 1\})$ und $A = \overleftarrow{f}[1]$ schaue man sich $\Phi(A)$ an.)