J. Wengenroth

Wintersemester 2013/14
28.11.2013

Einführung in die Mathematik
Blatt 4
Abgabe: Mittwoch, 11.12.13, bis 12 Uhr, Übungskasten 5

Anregungen für die Tutorien in der Woche 2. - 6. Dezember

T 16

(a) Seien X eine endliche Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so dass alle Äquivalenzklassen gleiche Kardinalität k haben. Zeigen Sie, dass k die Kardinalität von X teilt.

(b) Seien G eine endliche Gruppe mit der Gruppenoperation $* : G \times G \to G$ und H eine Untergruppe (d. h. $a * b \in H$ für alle $a, b \in H$ und $(H, *)$ ist ebenfalls eine Gruppe). Zeigen Sie, dass durch $x \sim y$, falls $y^{-1} * x \in H$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert ist, und dass $|H|$ ein Teiler von $|G|$ ist.

T 17
Sei K ein endlicher Körper mit m Elementen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot 1 = 0$, (wobei 1 und 0 die neutralen Elemente in K bezüglich der Multiplikation beziehungsweise Addition sind).

(b) $p = \min\{n \in \mathbb{N} : n \cdot 1 = 0\}$ ist eine Primzahl (die man Charakteristik des Körpers nennt).

(c) Durch $x \sim y$, falls es $k \in \{0, \dots, p-1\}$ gibt mit $x - y = k \cdot 1$, ist eine Äquivalenzrelation auf K definiert.

(d) $p|m$ und $m \cdot 1 = 0$.

T 18
Seien $(X, \leq)$ eine geordnete Menge und $\emptyset \neq A \subseteq X$ nach unten beschränkt. Zeigen Sie, dass A genau dann ein Infimum hat, wenn die Menge B aller unteren Schranken von A ein Supremum hat, und dass dann $\inf A = \sup B$ gilt.
Folgern Sie daraus, dass jede nicht leere nach unten beschränkte Menge ein Infimum hat, falls X ordnungsvollständig ist.

T 19
Seien K ein geordneter Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Binomialsatzes für alle $x \geq 0$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2.$$

(b) Zeigen Sie für $x \geq -1$ durch Induktion die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

(c) Gilt die Ungleichung in (a) ebenfalls für alle $x \geq -1$?

T 20
Seien K ein Körper und $p : K \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}$, das heißt es gibt $a_0, \dots, a_n \in K$ mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ für alle } x \in K.$$

Zeigen Sie für festes $x_0 \in K$, dass es $b_0, \dots, b_n \in K$ gibt mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k \text{ für alle } x \in K.$$

Folgern Sie daraus, dass $p(x_0) = 0$ genau dann gilt, wenn es eine Polynomfunktion q vom Grad $\leq n - 1$ gibt, so dass $p(x) = (x - x_0)q(x)$ für alle $x \in K$.

Hausaufgaben, Abgabe bis Mittwoch, 11. Dezember 2013 bis 12 Uhr

---

H 16

(a) Bestimmen Sie die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R} : (x + y)^2 = x^2 + y^2\}$.

(b) Zeigen Sie, dass in jedem endlichen Körper K mit n Elementen für alle $x, y \in K$ die Beziehung

$$(x + y)^n = x^n + y^n \text{ gilt.}$$

(Tipp: Dabei helfen der Binomialsatz und T 17.)

H 17
Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Auf $X \times X$ definieren wir eine Relation $(a, b) \trianglelefteq (x, y)$ durch $a < x$ oder ($a = x$ und $b \leq y$).

(a) Zeigen Sie, dass dadurch eine Ordnung auf $X \times X$ definiert ist.

(b) Im Fall $X = \mathbb{R}$ fassen wir $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als eine Zeichenebene auf. Skizzieren Sie die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \trianglelefteq (1, 2)\}.$$

(c) Ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Ordnung $\trianglelefteq$ ordnungsvollständig?
(Tipp: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < 1\}$.)

H 18
Seien $(X, \leq)$ eine ordnungsvollständige geordnete Menge und $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ ein System nicht leerer Teilmengen, so dass $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ nach oben beschränkt ist. Zeigen Sie, dass $\{\sup A_\alpha : \alpha \in I\}$ nach oben beschränkt ist und dass $\sup \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \sup\{\sup A_\alpha : \alpha \in I\}$.

H 19
Seien A, B nicht leere nach oben beschränkte Teilmengen eines geordneten Körpers, die Suprema $\sup A$ beziehungsweise $\sup B$ besitzen. Zeigen Sie

(a) $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ besitzt ein Supremum und $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(b) $-A = \{-a : a \in A\}$ besitzt ein Infimum und $\inf(-A) = -\sup A$.

H 20
Seien K ein Körper und $z \in K$, so dass die Gleichung $x^2 = z$ keine Lösung in K hat. Zeigen Sie, dass $K \times K$ mit den Operationen

$$(x, y) \oplus (a, b) = (x + a, y + b) \text{ und } (x, y) \odot (a, b) = (xa + ybz, xb + ya)$$

ein Körper ist, so dass $\omega = (0, 1)$ eine Lösung der Gleichung $\omega^2 = (z, 0)$ ist.

Hinweis. Die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze sind so einfach, dass Sie die nicht explizit verifizieren müssen. Es reicht, dass Sie die neutralen Elemente und die Inversen bezüglich $\oplus$ und $\odot$ angeben.