J. Wengenroth Wintersemester 2013/14
13.12.2013

Einführung in die Mathematik
Blatt 5
Abgabe: Mittwoch, 8. Januar 2014, bis 12 Uhr, Übungskasten 5

Anregungen für die Tutorien in der Woche 16. - 21. Dezember

T 21
Für $z, w \in \mathbb{C}$ schreiben wir $z \perp w$, falls $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = 0$.

(a) Zeigen Sie für $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass $z \perp w \iff vz \perp vw$.

(b) Zeigen Sie $z \perp w \iff |z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2$.

(c) Skizzieren Sie $\{w \in \mathbb{C} : w \perp z\}$ für $z \in \{1, i, 1+i, \frac{1}{1+i}\}$.

T 22
Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a = \sqrt{\frac{|z|+x}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{|z|-x}{2}} \text{ und } w = a + ib.$$

Zeigen Sie $w^2 = x + i|y|$ und $\overline{w}^2 = x - i|y|$. Folgern Sie daraus, dass jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau zwei Wurzeln hat. Was sind die Wurzeln von i beziehungsweise $1 + i$?

T 23
Sei $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x_∞. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $|x_\infty| \leq \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}_0\}$.

(b) $|x_n| \to |x_\infty|$ $(n \to \infty)$.

(c) $\sqrt{|x_n|} \to \sqrt{|x_\infty|}$ $(n \to \infty)$.

T 24

(a) Zeigen Sie $z^n/n! \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Sei $c \geq 1$ und $x_n = \sqrt[n]{c} - 1$. Zeigen Sie $\sqrt{n}\, x_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

(c) Zeigen Sie für $a, b, \in \mathbb{R}_+$, dass

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \to \max\{a, b\} \ (n \to \infty).$$

T 25
Für $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ definieren wir die Folge s der arithmetischen Mittel $s_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.

$$\text{Zeigen Sie } x \to x_0 \Longrightarrow s \to x_\infty.$$

Geben Sie ein Beispiel an, in dem die umgekehrte Implikation nicht gilt.

Hausaufgaben. Abgabe bis Mittwoch 8. Januar 2014

H 21
Seien $z, w \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie die untere Dreiecksungleichung

$$\Big||z| - |w|\Big| \leq |z - w|.$$

Was bedeutet diese Ungleichung für das Dreieck mit den Ecken $0, z$ und w?

(b) Zeigen Sie $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Skizzieren Sie für $z = 2 + i$ und $w = 1+2i$ das Viereck mit den Ecken $0, z, w$ und $z+w$, und erklären Sie die Bezeichnung *Parallelogrammgleichung* für obige Identität.

H 22
Zeigen Sie für $p, q \in \mathbb{C}$, dass die Polynomfunktion $f(z) = z^2+pz+q$ immer eine Nullstelle hat (das heißt, es gibt $w \in \mathbb{C}$ mit $f(w) = 0$). Für welche $p, q \in \mathbb{C}$ hat f genau zwei Nullstellen?

H 23
Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f(z) = z^3 - 1$ und zeigen Sie, dass die die Ecken e_1, e_2, e_3 eines gleichseitigen Dreiecks in $\mathbb{C}$ sind (das heißt $|e_1 - e_2| = |e_2 - e_3| = |e_2 - e_3|$). Skizzieren Sie dieses Dreieck.
Tipp: Mit der geometrischen Summenformel kann man $f(z) = (z-1)g(z)$ mit einem Polynom g zweiten Grades schreiben.

H 24
Zeigen Sie

(a) $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$.

(b) $\frac{n!}{n^n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

(c) $\sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(d) $\frac{2^n n!}{n^n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Tipps. Für (c) benutze man wie im Beweis von Satz 4.6 den dritten Summanden des Binomialsatzes. Für (d) berechne man die Quotienten x_{n+1}/x_n und zeige mit T 19, dass die für $n \geq 2$ immer $\leq 8/9$ sind.

H 25 Weihnachtsaufgabe
Frau Holle ist verzweifelt, weil sie das Rezept für Schneeflocken verloren hat. Rentier Rudi versucht sie mit folgendem Vorschlag zu trösten: Man beginne mit einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a und setze auf die Mitte jeder Seite ein kleineres gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a/3$. Dadurch erhält man eine Figur mit 12 Seiten, auf deren Mitten man wiederum kleine gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge $a/9$ setzt. Wenn man so weitermacht, erhält man eine Figur, die wie eine schöne Schneeflocke aussieht. Frau Holle ist begeistert, aber nun stellt sie sich folgende Fragen:

(a) Wie groß ist der Umfang x_n der Figur nach n solchen Schritten?

(b) Wie groß ist der Flächeninhalt y_n?

(c) Wie steht es mit der Konvergenz der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Helfen Sie Frau Holle und skizzieren Sie einige der entstehenden Figuren.