J. Wengenroth Wintersemester 2013/14
10.1.2014

Einführung in die Mathematik
Blatt 6
Abgabe: Mittwoch, 22. Januar 2014, bis 12 Uhr, Übungskasten 5

Anregungen für die Tutorien in der Woche 13. - 17. Dezember

T 26

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\frac{(n+1)^2-n^2}{n}$ (b) $\frac{(n+1)^3-n^3-cn^2}{n}$ für $c \in \mathbb{C}$

(c) $\sqrt{n^2-n}-n$ (d) $n(\sqrt{n^2-n}-n+1/2)$ (e) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

T 27

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)(n+4)}$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n+1}}$ (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

T 28

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} z^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} z^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n$.

Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchyprodukts den Wert der Reihe in (c).

T 29

(a) Zeigen Sie, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ streng monoton wachsend ist.

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\exp(z)| = 1$.

T 30

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in allen Punkten des Definitionsbereichs auf Stetigkeit.

(a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ (b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\exp(|x|^2)+1}$

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$

Hausaufgaben. Abgabe bis Mittwoch 22. Januar 2014

H 26
Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(b) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

(c) $\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

(d) $\frac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ für $p \in \mathbb{N}$.

H 27
Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} z^n$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3(1+(-1)^n)z^n$

H 28

(a) Zeigen Sie für eine Folge echt positiver Zahlen x_n folgende Implikation

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \longrightarrow c \Longrightarrow \sqrt[n]{x_n} \longrightarrow c.$$

(b) Beweisen Sie, dass $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ konvergiert.

H 29

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion, so dass $A_m = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{m}\}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$ stetig ist.

(b) Wo ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{m} & , \quad x = \frac{n}{m} \text{ gekürzt} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ stetig?

H 30
Seien (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq M \subseteq X$ und $\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{d(x, z) : z \in M\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $X \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \operatorname{dist}(x, M)$ stetig ist.

Hinweis. Beweisen Sie für $\varepsilon > 0$ und $x, y \in X$, dass $|\operatorname{dist}(x, M) - d(y, M)| \leq d(x, y) + \varepsilon$. O.b.d.A sei dabei $\operatorname{dist}(x, M) \geq \operatorname{dist}(y, M)$. Wählen Sie $z \in M$ mit $d(y, z) \leq \operatorname{dist}(y, M) + \varepsilon$.