J. Wengenroth Wintersemester 2013/14
24.01.2014

Einführung in die Mathematik
Blatt 7

Anregungen für die Tutorien in der Woche 27. - 30. Januar 2014

T 31

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \sin(z)/z & , \; z \neq 0 \\ 1 & , \; z = 0 \end{cases}$ stetig ist.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left| \exp\left(ix\frac{k}{n}\right) - \exp\left(ix\frac{k-1}{n}\right) \right|$. Interpretieren Sie $L_n(x)$ für $x \in [0, 2\pi[$ geometrisch und zeigen Sie $L_n(x) = 2n|\sin(x/2n)|$ sowie $L_n(x) \to |x|$ für $n \to \infty$.

T 32

Seien $A = \{z \in \mathbb{C} : \cos(z) \neq 0\}$ und $\tan : A \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Zeigen Sie für $z, w \in A$ mit $z + w \in A$

$$\tan(z + w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}$$

Welche Periodizitätseigenschaft hat diese Abbildung? Was ist die geometrische Interpretation (für $x \in [0, \pi/2[$)?

T 33

(a) Zeigen Sie für $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, dass

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \exp(y_j).$$

(Induktion. Der Fall $n = 2$ war in der Vorlesung behandelt).

(b) Zeigen Sie für $x_1, \ldots, x_n > 0$, dass

$$\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

T 34

(a) Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $(x^2 + 1)\exp(x) = \pi$.

(b) Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ einen Fixpunkt hat (d.h. $f(x) = x$ für ein $x \in [a, b]$).

T 35

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind $x^{(x^x)}$ und $(x^x)^x$ beide definiert? Wann ist $x^{(x^x)} \geq (x^x)^x$?

(b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$, dass $e^x \geq 1 + x$ und $\log(y) \leq y - 1$ (Vorsicht, falls $x < 0$).